Esercitazioni GE210
A.A. 2018/2019
Esercitazione 8
26/11/2018

Gli esercizi segnati con un asterisco non sono stati svolti in classe.

1. In $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ si trovino equazioni parametriche e cartesiane della retta r passante per i punti $P_1 = [1, 0, 1]$ e $P_2 = [1, 3, 4]$ e della retta s passante per i punti $P_3 = [0, 1, 2]$ e $P_4 = [2, 1, 1]$. Si trovi anche $r \cap s$.
   (Per r: eq. cart. $X_0 + X_1 - X_2 = 0$, eq. par. $x_0 = \lambda_0 + \lambda_1$, $x_1 = 3\lambda_1$, $x_2 = \lambda_0 + 4\lambda_1$; per s: eq. cart. $X_0 - 4X_1 + 2X_2 = 0$, eq. par. $x_0 = 2\lambda_1$, $x_1 = \lambda_0 + \lambda_1$, $x_2 = 2\lambda_0 + \lambda_1$; punto di intersezione di coordinate $[2, 3, 5]$).

2. In $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ si trovino equazioni parametriche e cartesiane del piano p_1 generato dai punti $P_1 = [i, 1, 0, 1]$, $P_2 = [2, 0, i, 1]$ e $P_3 = [1, i, 0, 1]$ e del piano p_2 generato dai punti $P_4 = [0, 1, i, 2]$, $P_5 = [2, i, 0, 1]$ e $P_6 = [0, 1, 0, 1]$. Si trovino anche equazioni parametriche di $p_1 \cap p_2$.
   (Per p_1: eq. cart. $(1 + i)X_0 + (1 + i)X_1 + 2iX_2 - 2iX_3 = 0$, eq. par. $x_0 = i\lambda_0 + 2\lambda_1 + \lambda_2$, $x_1 = \lambda_0 + i\lambda_2$, $x_2 = i\lambda_1$, $x_3 = \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2$; per p_2: eq. cart. $(1 + i)X_0 + 2iX_1 + 2X_2 - 2iX_3 = 0$, eq. par. $x_0 = 2\lambda_1$, $x_1 = \lambda_0 + i\lambda_1 + \lambda_2$, $x_2 = i\lambda_0$, $x_3 = 2\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2$; retta di intersezione di eq. par. $x_0 = 2i\lambda_0 + 4\lambda_1$, $x_1 = 2i\lambda_1$, $x_2 = i\lambda_1$, $x_3 = (1 + i)\lambda_0 + 3\lambda_1$).

3. In ciascuno dei seguenti casi si stabilisca se i punti dati di $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ sono linearmente indipendenti oppure no e si determinino equazioni cartesiane del sottospazio proiettivo da essi generato.

   (a) $P_1 = [1, 0, 1, 0]$, $P_2 = [0, 2, 1, 1]$, $P_3 = [-3, 8, 1, 4]$.
   (Sono dipendenti, generano la retta $X_0 - X_2 + X_3 = X_1 - 2X_3 = 0$)

   (b) $P_1 = [1, 3, 2, 1]$, $P_2 = [2, 5, 1, 3]$, $P_3 = [7, 1, 3, 6]$.
   (Sono indipendenti, generano il piano $7X_0 + 2X_1 - 3X_2 - 7X_2 = 0$)

4. Siano P il punto di coordinate omogenee $[0, 1, 1, 0]$ e p il piano di equazione $2X_1 - X_2 + 3X_3 = 0$ in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$. Si determini la proiezione $\pi_{P,p}$ dei punti $Q_1 = [0, 1, 0, 0]$, $Q_2 = [1, 1, 1, 1]$ e $Q_3 = [-5, -5, 5, 5]$. Si determini anche la proiezione della retta r_k di equazioni cartesiane $X_0 + X_1 + kX_2 = (k + 1)X_1 - X_3 = 0$, al variare di $k \in \mathbb{R}$.
   ($\pi_{P,p}(Q_1) = [0,1,2,0]$, $\pi_{P,p}(Q_2) = [1,-3,-3,1]$, $\pi_{P,p}(Q_3) = Q_3$, $\pi_{P,p}(r_{-1}) = [1,1,2,0]$, $\pi_{P,p}(r_k) : X_0 + kX_1 + (3k + 1)X_3 = 2X_1 - X_2 + 3X_3 = 0$ per $k \neq -1$)

5. Dimostrare che, date comunque due rette sghembe r e s in $\mathbb{P}^3(\mathbb{K})$ e un punto $P \notin r \cup s$, esiste un'unica retta t passante per P e incidente sia r che s.
   ($t = L(r, P) \cap L(s, P)$)

6. $*$ In ciascuno dei seguenti casi verificare che le rette assegnate r e s sono sghembe in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$, trovare l'incidente comune t passante per il punto P dato e trovare i punti di intersezione tra t e r e tra t e s.

   (a) $r : X_0 - X_1 + X_3 = X_0 + 2X_2 = 0$, $s : X_0 - X_1 = X_1 + X_3 = 0$, $P = [1, 0, 0, 1]$.
   ($t : X_0 + X_1 + 4X_2 - X_3 = X_0 - 2X_1 - X_3 = 0$; $t \cap r = [6, 4, -3, -2]$; $t \cap s = [4, 4, -3, -4]$)

   (b) $r : x_0 = 3\lambda_0$, $x_1 = \lambda_1$, $x_2 = \lambda_0 + \lambda_1$, $x_3 = \lambda_0 - \lambda_1$, $s : x_0 = \lambda_1 - \lambda_0$, $x_1 = \lambda_0$, $x_2 = \lambda_1$, $x_3 = \lambda_0 + 2\lambda_1$, $P = [0, 0, 2, -1]$.

($t : X_0 - X_1 - X_2 - 2X_3 = 5X_0 + 7X_1 - X_2 - 2X_3 = 0$;
$t \cap r = [6, -3, -1, 5]$; $t \cap s = [-2, 1, -1, -1]$)

7. $*$ Si trovino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui le rette r_k di equazioni cartesiane $kX_0 + X_2 = (k+1)X_1 + X_3 = 0$ e s_k di equazioni cartesiane $3X_0 + 3X_2 + 2X_3 = X_0 - kX_1 + X_2 = 0$ sono sghembe in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ e quelli per cui sono incidenti. Nel primo caso si trovi l'incidente comune t_k passante per il punto $U = [1, 1, 1, 1]$; nel secondo caso si calcolino il punto d'intersezione e il piano generato.

(Sghembe per $k \neq 1, 2$ e $t_k : (k+2)kX_0 - (k+1)^2 X_1 + (k+2)X_2 - (k+1)X_3 = (3k+2)X_0 - 8kX_1 + (3k+2)X_2 + (2k-4)X_3 = 0$;
$r_1 \cap s_1 = [1, 0, -1, 0]$ e $L(r_1, s_1) : X_0 - 4X_1 + X_2 - 2X_3 = 0$;
$r_2 \cap s_2 = [2, -1, -4, 3]$ e $L(r_2, s_2) : 3X_1 + X_3 = 0$)