Esercitazioni GE210
A.A. 2018/2019
Esercitazione 9
03/12/2018

Gli esercizi segnati con un asterisco non sono stati svolti in classe.

1. Proiettificare le seguenti rette di $\mathbb{A}^2(\mathbb{C})$ e determinarne il punto improprio rispetto a $j_0 : \mathbb{A}^2(\mathbb{C}) \to \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \setminus H_0$:
   (a) $X - 2Y + 5 = 0$
   ($5X_0 + X_1 - 2X_2 = 0$, $[0, 2, 1]$)
   (b) La retta di equazioni parametriche $x = 5 + 2t$, $y = -1 + t$
   ($7X_0 - X_1 + 2X_2 = 0$, $[0, 2, 1]$)
   (c) $3iX + Y - 1 = 0$
   ($X_0 - 3iX_1 - X_2 = 0$, $[0, 1, -3i]$)
   (d) La retta di equazioni parametriche $x = 2 + 2t$, $y = -1 - 5t$
   ($8X_0 - 5X_1 - 2X_2 = 0$, $[0, 2, -5]$)
   (e) $X = 3$
   ($3X_0 - X_1 = 0$, $[0, 0, 1]$)
2. Ripetere l'esercizio precedente considerando, invece di j_0, $j : \mathbb{A}^2(\mathbb{C}) \to \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \setminus H$, con H il piano di equazione cartesiana $X_0 + 2X_1 - 3X_2 = 0$.
   (Nell'ordine: $5X_0 + 11X_1 - 17X_2 = 0$, $[1, -2, -1]$; $7X_0 + 13X_1 - 19X_2 = 0$, $[1, -2, -1]$; $X_0 + (2 - 3i)X_1 - 4X_2 = 0$, $[2 + 9i, -1, 3i]$; $8X_0 + 11X_1 - 26X_2 = 0$, $[19, -2, 5]$; $3X_0 + 5X_1 - 9X_2 = 0$, $[3, 0, 1]$)
3. Determinare equazioni in coordinate non omogenee di ciascuno dei seguenti piani di $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$:
   (a) $X_0 - X_1 + X_2 + iX_3 = 0$
   ($1 - X + Y + iZ = 0$)
   (b) Il piano di coordinate parametriche $x_0 = \lambda_0$, $x_1 = i\lambda_0 + 5\lambda_1$, $x_2 = \lambda_1$, $x_3 = \lambda_2$.
   ($X - 5Y - i = 0$)
   (c) $\sqrt{2}X_0 - X_2 - X_3 = 0$
   ($Y - Z - \sqrt{2} = 0$)
4. Determinare coordinate omogenee del punto comune alle chiusure proiettive delle seguenti coppie di rette di $\mathbb{A}^2(\mathbb{C})$:
   (a) $r : X + iY - 1 = 0$ e $s : X + Y = 0$
   ($[2, i + 1, -1 - i]$)
   (b) $r : X - Y + i = 0$ e $s : 2X - 2Y + 5 = 0$
   ($[0, 1, 1]$)
5. Determinare proiettificazione e punti impropri delle seguenti rette di $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$: $r : X + Y + Z - 2 = X - Y = 0$, $s : 2X - Y + Z - 1 = X + Z + 1 = 0$ e t di equazioni parametriche $x = 3 - t$, $y = 2 - 2t$ e $z = 1 - 3t$. Determinare anche un'equazione cartesiana del piano p passante per i punti impropri di r e s e incidente la proiettificazione di t nel punto di coordinate omogenee $[1, 2, 0, -2]$.
   (Nell'ordine: $2X_0 - X_1 - X_2 - X_3 = X_1 - X_2 = 0$, $[0, 1, 1, -2]$; $X_0 - 2X_1 + X_2 - X_3 = X_0 + X_1 + X_2 = 0$, $[0, 1, 1, -1]$; $4X_0 - 2X_1 + X_2 = 8X_0 - 3X_1 + X_3 = 0$, $[0, 1, 2, 3]$; $2X_0 - X_1 + X_2 = 0$)

6. $*$ Determinare proiettificazioni e coordinate plückeriane delle rette di $\mathbb{E}^3$ $\mathscr{r} : X+3Y+Z+1 = 2X-Z-1 = 0$ e $\mathscr{s} : 2X-Y+Z+2 = X+Y+1 = 0$. Calcolarne anche la distanza.

(Nell'ordine $X_0 + X_1 + 3X_2 + X_3 = X_0 - 2X_1 + X_3 = 0$, $[1, -1, 2, 0, 1, -1]$; $2X_0 + 2X_1 - X_2 + X_3 = X_0 + X_1 + X_2 = 0$, $[-1, 1, 3, -1, -3, 0]$; $\frac{\sqrt{2}}{2}$)

7. $*$ Al variare di $k \in \mathbb{R}$, si determinino equazioni cartesiane delle rette $\mathscr{r}_k$ e $\mathscr{s}_k$ di $\mathbb{E}^3$ le cui proiettificazioni hanno coordinate plückeriane, rispettivamente, $[1, 0, k, 1, -1, -k]$ e $[1, k+1, 1, -k, 0, k]$. Si stabilisca per quali valori di k, $\mathscr{r}_k$ e $\mathscr{s}_k$ sono sghembe e se ne calcoli la distanza. Si stabilisca se esistono k per cui $\mathscr{r}_k$ e $\mathscr{s}_k$ sono incidenti e nel caso si calcoli il punto di intersezione. Si stabilisca se esistono k per cui sono parallele.

($\mathscr{r}_k : kX - Z + 1 = Y + 1 = 0$ e $\mathscr{s}_k : X - Z = (k+1)X - Y + k = 0$. Sono sghembe per $k \neq 2, -1$ e hanno distanza $\frac{|k^2-k-2|}{\sqrt{k^4+2k^3+3k^2+2}}$; $\mathscr{r}_2 \cap \mathscr{s}_2 = (-1, -1, -1)$ e $\mathscr{r}_{-1} \cap \mathscr{s}_{-1} = (\frac{1}{2}, -1, \frac{1}{2})$)

Come ho accennato a lezione spiegando le coordinate plückeriane, queste sono introdotte alle pagine 312-314 di *Geometria 1* di Sernesi (nella seconda edizione 2000, ristampa ottobre 2009, nel caso in eventuali ristampe o nuove edizioni fossero cambiati i numeri di pagina, sono quasi alla fine del capitolo 24), mentre il loro uso per calcolare la distanza si trova alle pagine 329-330 (overo alla fine del capitolo 25). Nell'edizione citata ci sono alcuni piccoli refusi: a pagina 313, a nove righe dalla fine, nell'elenco delle coordinate di $L(P, Q)$ manca la seconda $p_{01}p_{02}$; alla fine di pagina 329 sembrerebbe che L sia p_{12} e N sia p_{23} ma ciò è in contraddizione con la seconda riga di pagina 330, dove vengono scambiate, la formula della distanza a pagina 330 (che si verifica confrontandola con la formula [19.10] a pagina 254) funziona con $L = p_{23}$ e $N = p_{12}$; infine sempre nella formula della distanza a pagina 330 bisogna considerare il modulo del numeratore e non il numeratore (c'è lo stesso refuso anche nella formula [19.10] di pagina 254).