Ancora sui cambi di coordinate!

supponiamo di avere un dominio

descritto nella forma

$$E := \{ a < f(x,y) < b \; ; \; c < g(x,y) < d \}$$

Vorrei fare un cambiamento $\psi \; (u,v) \to (x,y)$

in modo che $\psi^{-1}(E) = (a,b) \times (c,d)$

potrebbe essere conveniente

$$\psi^{-1} \Rightarrow \begin{cases} u = f(x,y) \\ v = g(x,y) \end{cases}$$

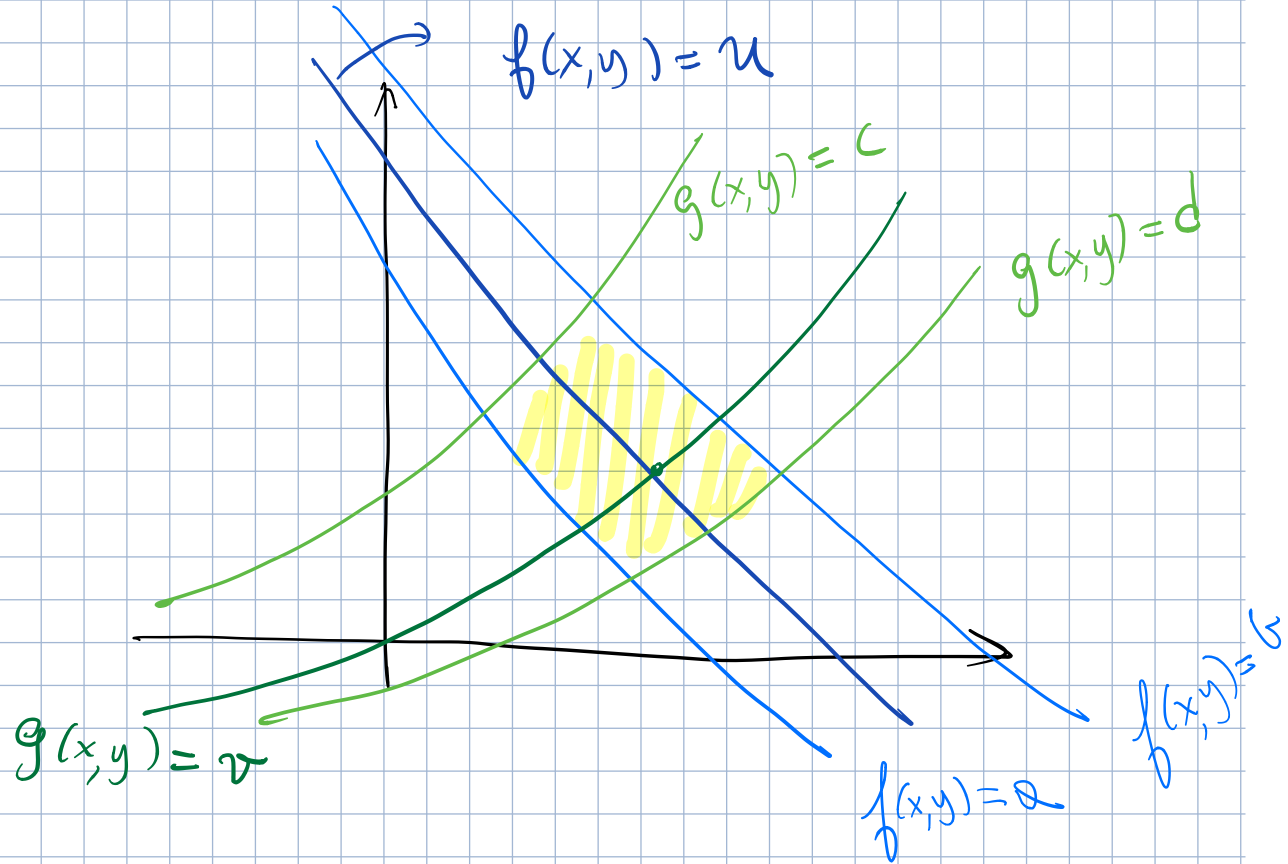
* (qui scrivo le NUOVE VARIABILI in termini di (x,y))

La mappa deve essere 1 a 1 nel dominio

(devo cercare di invertire * a

mano facendo vedere che in E

fissare u,v è EQUIVALENTE A fissare (x,y))



in questo disegno in

E (dominio giallo) le due equazioni

$$\begin{cases} f(x,y) = u \\ g(x,y) = v \end{cases} \quad \text{forniscono} \quad \begin{array}{l} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{array}$$

UNIVOCAMENTE in E)

(naturalmente potrebbe essere che ci sono ALTRE soluzioni NON dentro E)

a questo punto per passare alle variabili (u,v) serve $|\det J\psi|$

ora $\quad |\det J\psi| = \dfrac{1}{|\det J\psi^{-1}|_{\substack{x = x(u,v) \\ y = y(u,v)}}}$

$$J\psi^{-1} = \begin{pmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{pmatrix} .$$

<u>Coordinate cilindriche</u>.

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \\ z &= z \end{aligned} \qquad J\psi = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det J\psi = r$$

Utile per esempio per integrare su solidi di rotazione attorno all'asse $\hat{z}$

$$D = \{(x,y,z) : a < z < b,\ x^2+y^2 \le f^2(z)\}$$

$$\psi^{-1}(D) = \{(r,\theta,z) : a < z < b,\ 0 < \theta \le 2\pi,\ r \le f(z)\}$$

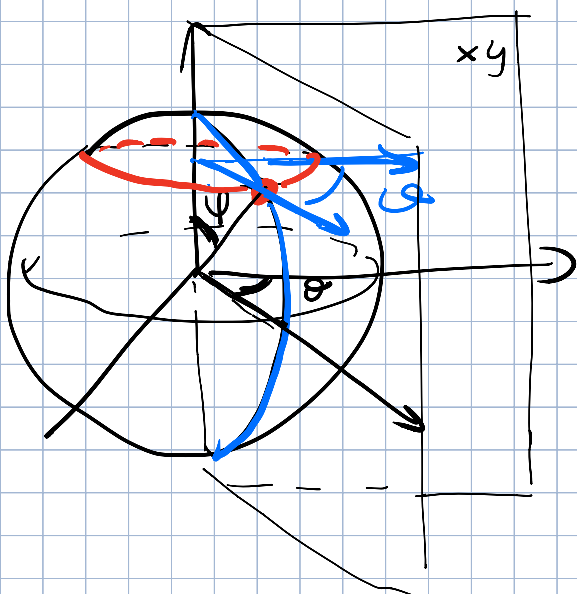
$(R \in \Pi \quad f(z) \geq 0)$

$$\int_D dx\,dy\,dz = \int_a^b dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{f(z)} r\,dr = \pi \int_a^b f^2(z)\,dz$$

(questa formula l'avevamo già vista!)

le coordinate sferiche

dato $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$



fisso 1 sfera

di raggio

$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

1 mezzo meridiano che forma col piano xy un angolo θ

(il mezzo meridiano si ottiene intersecando la sfera di raggio r con il SEMIPIANO VERTICALE che contiene l'asse $\hat{z}$