e il punto (x, y, z))

1 parallelo ottenuto intersecando la sfera di raggio r con il PIANO ORIZZONTALE di altezza

$z = r \cos\varphi$ con $0 < \varphi < \pi$

il raggio della circonferenza parallelo è $\rho = r \sin\varphi$

$$\begin{cases} x = \rho \cos\theta = \rho \sin\varphi \cos\theta \\ y = \rho \sin\theta = \rho \sin\varphi \sin\theta \\ z = \rho \cos\varphi \end{cases}$$

ESERCIZIO: scrivere le coordinate sferiche in $\mathbb{R}^n$

(provare prima in $\mathbb{R}^4$)

UN modo meno geometrico

$$\underbrace{x^2 + y^2}_{\shortparallel} + z^2 = r^2$$

$$\rho^2 + z^2 = r^2$$

quindi $\begin{cases} x = \rho \cos\theta \\ y = \rho \sin\theta \end{cases}$ $\begin{cases} z = r\cos\varphi \\ \rho = r \sin\varphi \end{cases}$

metto insieme $\Rightarrow$

$$\begin{cases} x = r \sin\varphi \cos\theta \\ y = r \sin\varphi \sin\theta \\ z = r\cos\varphi \end{cases}$$

se $0 < \theta < 2\pi$

$0 \leq \varphi < \pi$

$\swarrow$

in modo che

$-r < z < r$

in $\mathbb{R}^4$ $\underbrace{x^2 + y^2 + z^2}_{\shortparallel} + w^2 = r^2$

$\rho^2 + w^2 = r^2 \Rightarrow$ $w = r\cos\gamma$

$\rho = r\sin\gamma$

$0 \leq \gamma < \pi$

ora $x^2 + y^2 + z^2 = \rho^3$ individua una sfera

in $\mathbb{R}^3$ con raggio ρ

$$\begin{cases} x = \rho \sin\varphi \cos\theta \\ y = \rho \sin\varphi \sin\theta \\ z = \rho \cos\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = r \sin\gamma \sin\varphi \cos\theta \\ y = r \sin\gamma \sin\varphi \sin\theta \\ z = r \sin\gamma \cos\varphi \\ w = r \sin\varphi \end{cases}$$

e così via!

Vediamo come viene $J\varphi$

$$\begin{cases} x = r \sin\varphi \cos\theta \\ y = r \sin\varphi \sin\theta \\ z = r \cos\varphi \end{cases}$$

$$J\varphi = \begin{pmatrix} \sin\varphi \cos\theta & r\cos\varphi \cos\theta & -r\sin\varphi \sin\theta \\ \sin\varphi \sin\theta & r\cos\varphi \sin\theta & r\sin\varphi \cos\theta \\ \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det J\psi = \cos\varphi\left(r^2\cos\varphi\sin\varphi\cos^2\theta + r^2\cos\varphi\sin\varphi\sin^2\theta\right)$$

$$+ r\sin\varphi\left(r\sin^2\varphi\cos^2\theta + r\sin^2\varphi\sin^2\theta\right) =$$

$$r^2\left(\cos^2\varphi\sin\varphi + \sin^3\varphi\right) = r^2\sin\varphi$$

$(0 < \varphi < \pi$ quindi $\sin\varphi \geq 0)$

$$\int_{x^2+y^2+z^2\leq 4} dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin\varphi \int_0^2 r^2\,dr =$$

$$2\pi \cdot \left[-\cos\varphi\right]_0^{\pi} \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^2 = \frac{4\pi}{3}(2)^3 \ !$$

COSA SUCCEDE in $\mathbb{R}^4$?

Provare a calcolare $\quad B_r$ = palla di raggio r in $\mathbb{R}^4$!

$$\lim_{r\to\infty} \int_{B_r} e^{-|x|}\,dx_1\,dx_2\,dx_3\,dx_4$$