Le curve

una curva (parametrica)

è una mappa continua $[a,b] \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}^n$
$t \to \varphi(t)$

come abbiamo visto con solo queste condizioni posso ottenere oggetti molto complicati e lontani dalla intuizione per cui una curva in $\mathbb{R}^n$ è
"un insieme unidimensionale continuo" (Wiki)

Curva regolare: chiediamo che φ sia $C^1((a,b))$
[possibilmente che $\exists \lim_{t \to a^+} \varphi'(t)$, $\lim_{t \to b^-} \varphi'(t)$]

chiediamo inoltre che $\varphi'(t) \neq \vec{0} \quad \forall t \in (a,b)$

)

l'immagine $\varphi([a,b])$ si dice il sostegno o supporto della curva.
(a volte si confonde una curva e il suo sostegno)

N.B. in meccanica $t \to \varphi(t)$ è una traiettoria
il sostegno $\varphi([a,b])$ cioè i punti

$$\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \exists\, t \in (a,b) : x = \varphi(t) \}$$

si chiama ORBITA

può essere anche comodo scrivere $t \to \vec{x}(t)$
(confondendo la variabile $\vec{x}$ con la funzione φ)

Curva regolare semplice

Una curva regolare t.c. $t \to \varphi(t)$ sia INIETTIVA su (a,b).

Una curva regolare a tratti è una curva CONTINUA unione di un # finito di curve regolari.
(lo stesso vale per curve semplici a tratti)

Esempi di curve:

Esempio 15.1 Se $f(x)$ è una funzione di classe C^1 in $[a, b]$,[2] la curva piana di equazioni

$$\varphi \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = f(t) \end{cases}$$

DIM che φ è regolare

$t \xrightarrow{\varphi} \begin{pmatrix} t \\ f(t) \end{pmatrix}$ è C^1 infatti $\varphi'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ f'(t) \end{pmatrix}$

inoltre ovviamente $|\varphi'(t)| = 1 + f'(t)^2 \neq 0$
$\forall t$!

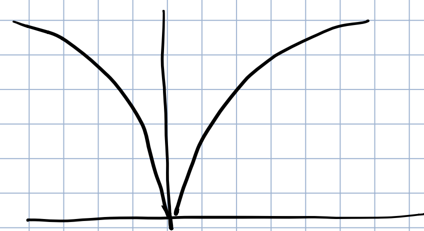
φ è anche semplice (infatti $x = t$ è evidentemente iniettiva)

Consideriamo ora $\varphi : [-1, 1] \to \mathbb{R}^2$ $\begin{cases} x = t^3 \\ y = t^2 \end{cases}$

Dire se φ è regolare. disegnarla

φ è solo REG a tratti infatti $\varphi' = \begin{pmatrix} 3t^2 \\ \ldots \end{pmatrix}$

e se $t = 0$ $\quad |\varphi'(0)| = 0 \Rightarrow \varphi'(0) = \vec{0}$



$x = t^3 \Rightarrow t = x^{\frac{1}{3}}$

$y = x^{\frac{2}{3}}$

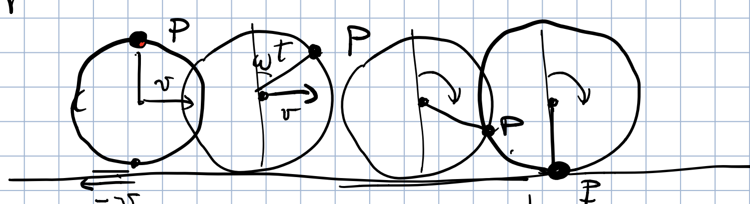
Esempio 15.2 Calcoliamo la retta tangente alla curva γ di equazioni

$$\begin{cases} x = t - \operatorname{sen} t \\ y = 1 - \cos t \end{cases} \qquad [15.5]$$

nel punto $\left(\frac{\pi}{2} - 1, 1\right)$.

Disegnare la curva

(questa è la CICLOIDE)



P sta su una ruota che rotola (senza strisciare)

$$P(t) = \begin{pmatrix} vt \\ r \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} \sin \omega t \\ \cos \omega t \end{pmatrix} \qquad \omega = \frac{v}{r}$$

Di nuovo la curva è solo reg. a tratti $\quad \varphi' = \begin{pmatrix} 1 - \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \qquad t = 2k\pi \quad \varphi' = 0$!

$$\begin{cases} t - \sin t = \frac{\pi}{2} - 1 \\ 1 - \cos t \quad 1 \end{cases} \Rightarrow \quad t = \frac{\pi}{2} \qquad \varphi'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

equazione PARAMETRICA $\quad r(t) = \varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) + \varphi'\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(t - \frac{\pi}{2}\right)$

equazione CARTESIANA $\quad \dfrac{x - \varphi_1\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\varphi_1'\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \dfrac{y - \varphi_2\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\varphi_2'\left(\frac{\pi}{2}\right)}$

Quindi se la curva NON è regolare ci possono essere dei punti angolosi.

N.B. se $t \to \vec{x}(t)$ è la soluzione di un problema di Cauchy ben posto

allora $x(t)$ è una curva SEMPLICE.

inoltre se $t \to \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_2(t) \\ \vdots \\ \varphi_n(t) \end{pmatrix}$ è una

curva regolare allora <u>LOCALMENTE</u>

si può scrivere in equazioni CARTESIANE.

infatti se $\varphi'(t_0) \neq 0 \quad \forall\, t_0 \in (a, b)$

almeno una delle componenti della velocità

è $\neq 0$ (per esempio $\varphi_1'(t_0) > 0$)

allora $t \to \varphi_1(t)$ è LOCALMENTE invertibile

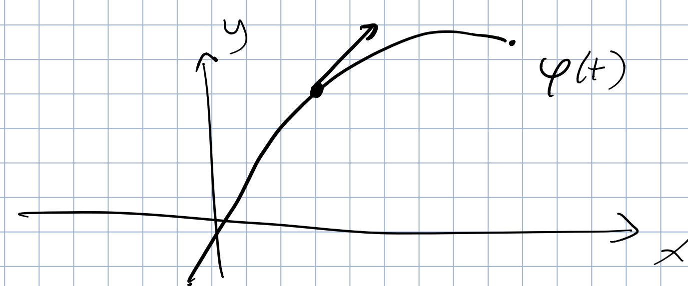
$t = g(x_1)$ e sostituendo si ottengono

le equazioni cartesiane

$$x_2 = \varphi_2(g(x_1)) \qquad \vec{y} = (x_2, \dots, x_n)$$

$$x_3 = \varphi_3(g(x_1)) \quad \Downarrow \quad \vec{y} = G(x_1)$$

$$\vdots$$



Ricordate che $\varphi'(t) = \lim_{h \to 0} \dfrac{\varphi(t+h) - \varphi(t)}{h}$

è il vettore tangente alla curva

(LA VELOCITA')

ora vediamo cosa succede se cambiamo

la parametrizzazione.

Definizione 15.2 *Due curve regolari $\varphi : [a, b] \to \mathbf{R}^n$ e $\gamma : [c, d] \to \mathbf{R}^n$ si diranno* equivalenti *se esiste una funzione $p : [a, b] \to [c, d]$ di classe C^1, surgettiva, e con derivata sempre diversa da zero, tale che*

$$\varphi(t) = \gamma(p(t)).$$

Due curve equivalenti hanno evidentemente lo stesso sostegno; inoltre se $p' > 0$ la funzione $p(t)$ è crescente, e quindi $p(c) = a$ e $p(d) = b$, cosicché il primo estremo di φ è anche primo estremo di γ, e così il secondo estremo. Se invece $p' < 0$ risulta $p(c) = b$, $p(d) = a$ e i due estremi si scambiano. Nel primo caso si dirà che le curve γ e φ hanno lo stesso verso, nel secondo che hanno verso opposto.

~~Se la curva φ è regolare, il vettore~~

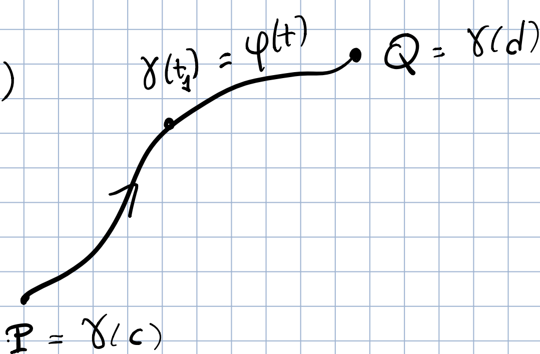
$$[c, d] \xrightarrow{\gamma} \mathbb{R}^2$$

$$t_1 \to \gamma(t_1)$$

$$[a, b] \underset{p}{\Leftrightarrow} [c, d]$$

$$t \to t_1 = p(t)$$

$$\varphi(t) = \gamma(p(t))$$



se $p'(t) > 0$ vado sempre da P a Q

altrimenti φ ha verso opposto (va da Q a P)

Il versore tangente $\dfrac{\varphi'(t)}{|\varphi'(t)|}$ è uguale per tutte le param. equivalenti (con lo stesso verso)

Dim (derivata f. composta) $\varphi(t) = \gamma(p(t))$

$$\frac{\varphi'(t)}{|\varphi'(t)|} = \frac{\gamma'(p(t))\, p'(t)}{|\gamma'(p(t))|\,|p'(t)|} = \frac{\gamma'(t_1)}{|\gamma'(t_1)|}$$

Ascissa curvilinea

Data $t \to \varphi(t)$ costruire una parametrizzaz. equivalente $\gamma(\ell) = \varphi(g(\ell))$

$$[a,b] \underset{g}{\overset{f}{\rightleftarrows}} [0,L]$$

$$t \qquad \ell$$

con $\ell \to t = g(\ell)$ mappa 1 a 1

$\ell = f(t)$ $\quad (f = g^{-1})$

tale che $\gamma(\ell) = \varphi(g(\ell))$

ha velocità $\gamma'(\ell)$ di modulo $= 1$ $\quad \forall \ell \in [0,L]$

$$|\gamma'(\ell)| = |\varphi(g(\ell))| = |\varphi'(g(\ell))||g'(\ell)| = 1$$

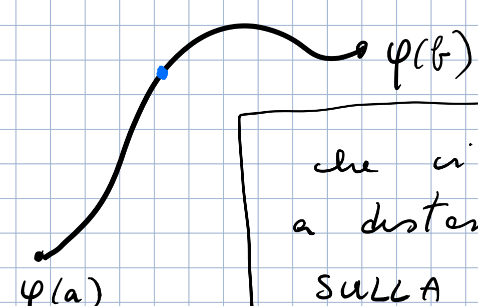
$$t = g(\ell) \Leftrightarrow \ell = f(t) \qquad g'(f(t)) = \frac{1}{f'(t)}$$

$$\frac{|\varphi'(t)|}{f'(t)} = 1 \Leftrightarrow f(t) = \int_a^t |\varphi'(\tau)|\, d\tau$$

$$L = \int_a^b |\varphi'(\tau)|\, d\tau$$

(L è la lunghezza della curva)

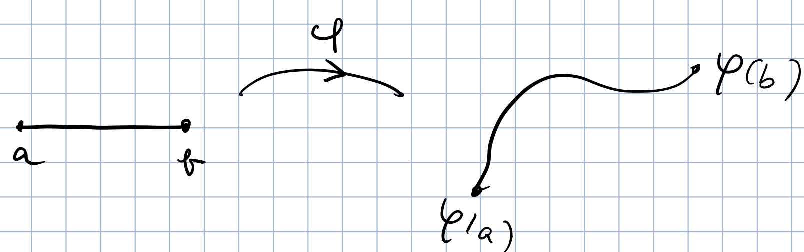
$f(t)$ è la distanza percorsa sulla curva! nel tempo t



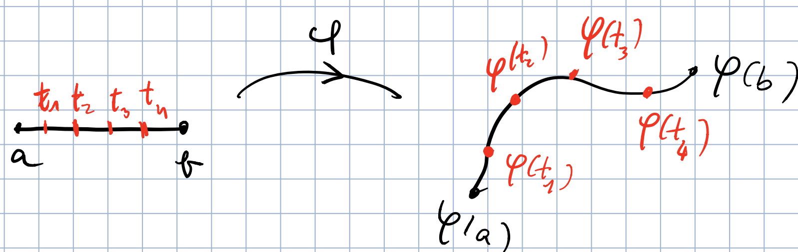
$g(\ell)$ è il tempo che ci si mette ad arrivare a distanza ℓ muovendosi SULLA CURVA

Nota Bene. in una curva param. tramite l'ascissa curvilinea (da P a Q) il vettore ACCELERAZIONE (supp. che sia C^2) è $\perp$ alla velocità.

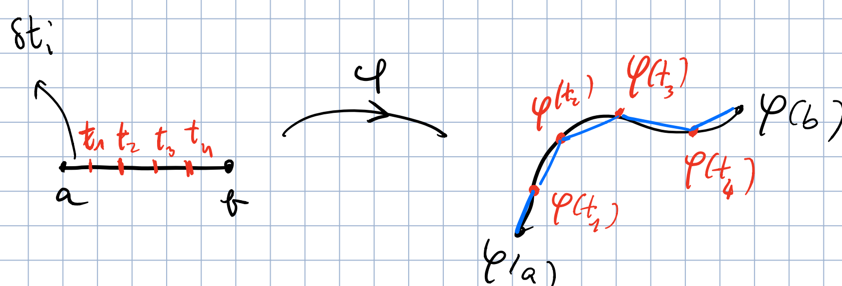
Dimostriamo che L è la lunghezza della curva



faccio una partizione di $[a,b] = \bigcup [t_{i-1}, t_i]$



traccio una spezzata che congiunge $\varphi(t_{i-1}), \varphi(t_i)$



la lunghezza $L \leq \sum_{i=1}^{5} |\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})|$

$\quad = \quad$ per il teorema di Lagrange $\sum_{i=1}^{5} |\varphi'(t_i^*)| \, |t_{i-1} - t_i|$

$$= \int_a^b |\varphi'(t)| \, dt \, .$$

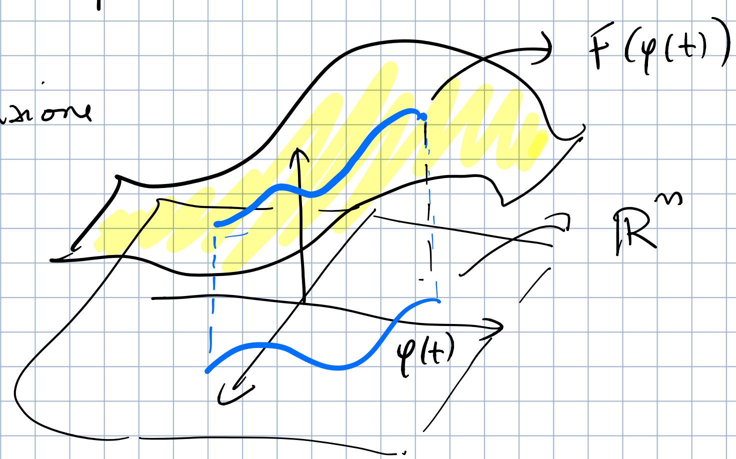
Ora se ho una funzione $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

e una curva $\varphi: [a,b] \to \mathbb{R}^n$

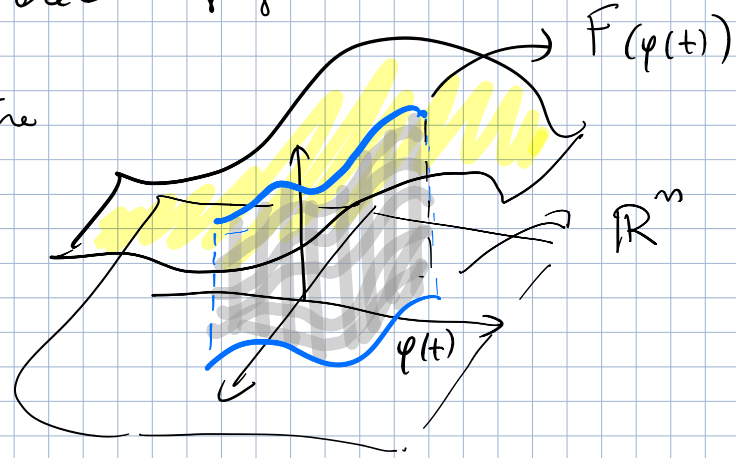
posso <u>definire</u>

$$\int_\varphi F \, dl = \int_a^b F(\varphi(t)) \, |\varphi'(t)| \, dt$$

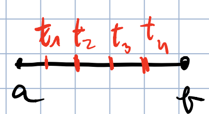
dl si riferisce
alla parametrizzazione
dell'ascissa
curvilinea
$l \to \gamma(l)$
ha $|\gamma'(l)| = 1$!

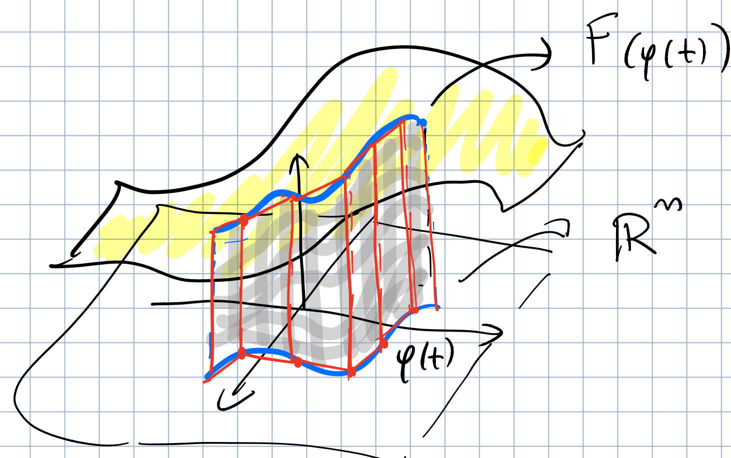


$\int f\,d\ell$ è l'area in grigio



(basta ripetere lo stesso argomento fatto per calcolare L)





LEMMA:

$\int_\varphi F\,d\ell$ NON dipende dalla parametrizzazione (neanche dal suo verso)

$$\int_a^b F(\varphi(t))\,|\varphi'(t)|\,dt \qquad t = p(\tau) \qquad dt = p'(\tau)\,d\tau$$

$$[c,d] \longrightarrow [a,b]$$

$$\int_{p(a)}^{p(b)} F(\varphi(p(\tau)))\,|\varphi'(p(\tau))|\,p'(\tau)\,d\tau \qquad \gamma(\tau) = \varphi(p(\tau))$$

se $p'(\tau) > 0$ $\quad p(a) < p(b) \quad p(a) = c \quad p(b) = d$

$$\int_a^b F(\varphi(t))\,|\varphi'(t)|\,dt = \int_c^d F(\gamma(\tau))\,|\gamma'(\tau)|\,d\tau$$