LEZIONE 2.

ni integrabili in R. Si ha il seguente

Teorema 12.2 (di riduzione, o di Fubini) *Sia $f(x, y)$ una funzione integrabile nel rettangolo $R = [a, b) \times [c, d)$, e supponiamo che per ogni $x \in [a, b)$ la funzione $f(x, y)$, considerata come funzione della sola y, sia integrabile in $[c, d)$. Allora la funzione*

$$F(x) = \int_c^d f(x, y)dy$$

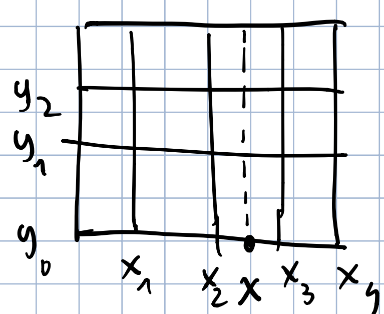
è integrabile in $[a, b)$, e risulta

$$\int_R f(x, y)dxdy = \int_a^b F(x)dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)dy. \qquad [12.2]$$

Dimostriamolo prima per una funzione SEMPLICE

$$\varphi(x,y) = \sum_{ij} \lambda_{ij} \, \varphi_{R_{ij}}(x, y)$$

ricordando che $R_{hk} = [x_{h-1}, x_h) \times [y_{k-1}, y_k)$



se $x \in [x_{h-1}, x_h]$ $\Rightarrow$

$\varphi(x,y)$ (x fisso vario y)

è una funzione SEMPLICE della y

$$\varphi(x,y) = \sum_J \lambda_{hJ} \, \varphi_{R_{hJ}}(x,y) \quad \text{se} \quad x \in [x_{h-1}, x_h)!$$

$$S(x) := \int \varphi(x,y)\, dy = \sum_J \lambda_{hJ} |y_J - y_{J-1}|$$

quindi $S(x)$ è una funzione semplice!

$$S(x) = \begin{cases} \sum_J \lambda_{hJ} |y_J - y_{J-1}| & x \in [x_{h-1}, x_h) \\ 0 & x \notin [a,b) \end{cases}$$

$$\int S(x)\, dx = \sum_h \left(\sum_J \lambda_{hJ} |y_J - y_{J-1}| \, |x_h - x_{h-1}| \right) =$$

$$\int \varphi \, dx\, dy$$

quindi VALE il teorema di Fubini

se φ è SEMPLICE

Se f è integrabile $\forall \varepsilon > 0$

esistono $\varphi(x,y) \leq f(x,y) \leq \psi(x,y)$

t.c. $\int \psi(x,y)\, dx\, dy - \int \varphi(x,y)\, dx\, dy < \varepsilon$ (**)

ora fisso x. come funzioni di y

$\varphi(x,y)$ e $\psi(x,y)$ SONO SEMPLICI

(quindi integrabili) inoltre $f(x,y)$

è integrabile in y per ipotesi.

$$\begin{array}{ccccc} \int \varphi(x,y)\,dy & \leq & \int f(x,y)\,dy & \leq & \int \psi(x,y)\,dy \\ \parallel & & \parallel & & \parallel \\ s(x) & \leq & F(x) & \leq & S(x) \end{array}$$

per (**) e per il teo di Fubini applicato alle funzioni semplici φ, ψ $\Rightarrow$

$$\int S(x)\,dx - \int s(x)\,dx =$$

$$= \int \psi(x,y)\,dx\,dy - \int \varphi(x,y)\,dx\,dy < \varepsilon$$

quindi (per l'arbitrarietà di ε)

$F(x)$ è integrabile e

$$\int \varphi(x,y)\,dx\,dy \le \int F(x)\,dx \le \int \psi(x,y)\,dx\,dy$$

ma da $(**)$ segue

$$\int f(x,y)\,dx\,dy - \varepsilon \le \int F(x)\,dx \le \int f(x,y)\,dx\,dy + \varepsilon$$

mandando $\varepsilon \to 0$

$$\int dx \int dy\, f(x,y) = \int f(x,y)\,dx\,dy$$

Vedere nel libro il caso $d = 3$.

SEMPLICE CONSEGUENZA

Insiemi normali

dato un intervallo $[a, b]$

due funzioni INTEGRABILI $g(x) \le h(x)$ su $[a, b]$

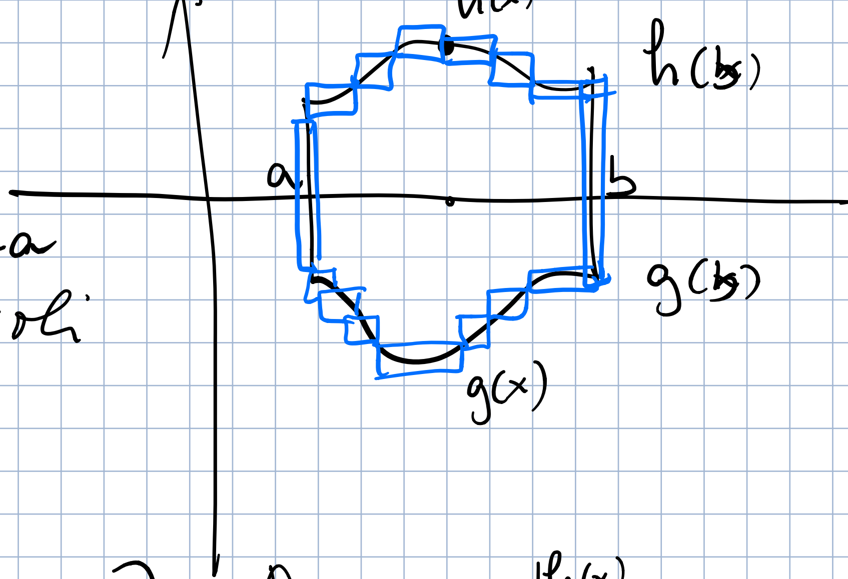
si definisce

$$E = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : a \le x \le b,\ g(x) \le y \le h(x)\}$$

è misurabile, ~~essendo differenza dei due insiemi misurabili H e G~~, e la sua misura è

$$m(E) = \int_a^b [h(x) - g(x)]\,dx.$$

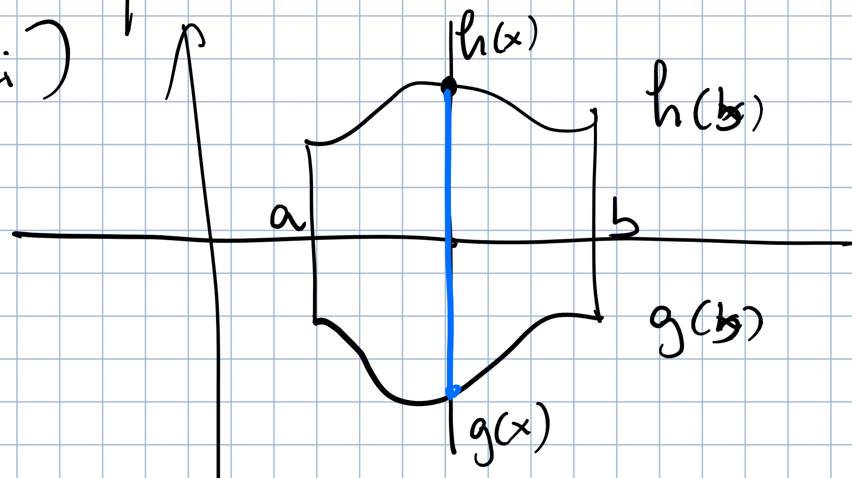
dato che $h(x)$ e $g(x)$ sono integrabili l'area totale dei rettangoli blu $\bar{e} < \varepsilon$



(per Fubini)

$m(E) =$

$$\int\left(\int \varphi_E(x,y)\,dy\right)dx$$



$$\int \varphi_E(x,y)\,dy = h(x) - g(x)$$

lunghezza del segmento blu

$$\int_E \varphi_E(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(h(x) - g(x)\right)dx$$

(Vedere la definizione di insieme normale in dimensione 3)

Fubini in dimensione 3.

- $f(x,y,z)$ integrabile in $\overset{V}{\overset{\shortparallel}{[a,b)\times[c,d)\times[e,\ell)}}$

① Se $\forall (x,y)\in[a,b)\times[c,d)$ $\quad z\to f(x,y,z)$
è integrabile in $[e,\ell)$ allora

$$\int_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_{[a,b)\times[c,d)} dx\,dy \int_e^{\ell} f(x,y,z)\,dz$$

② Se $\forall z\in[e,\ell]$ $\quad (x,y)\to f(x,y,z)$
e integrabile in $[a,b)\times[c,d)$ allora

$$\int_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_e^{\ell} dz \left(\int_{[a,b)\times[c,d)} f(x,y,z)\,dx\,dy\right)$$

Quindi se $E \subseteq V$ è un

insieme NORMALE

$$E := \{ (x,y) \in D ; g(x,y) \leq z \leq h(x,y) \}$$

D è un insieme misurabile

$$\int_E f(x,y,z)\, dx\,dy\,dz = \int_D dx\,dy \int_{g(x,y)}^{h(x,y)} f(x,y,z)\, dz$$

allo stesso modo se un

insieme $E \subseteq V$ è tale che

$\forall z \in [e,\ell)$ l'insieme $E_z \subseteq [a,b) \times [c,d)$

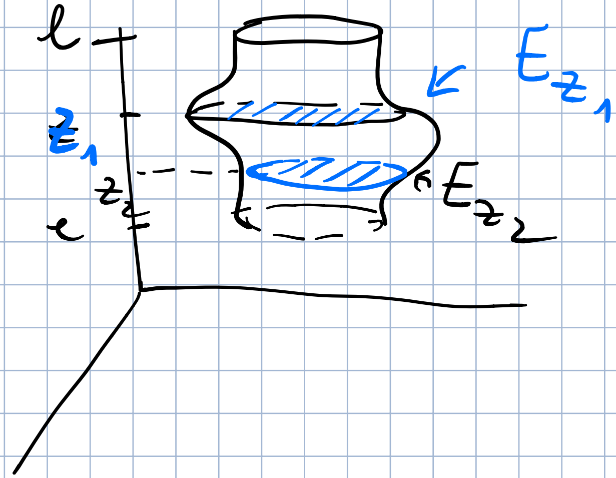
definito come

$$E_z := \{ (x,y) \in [a,b) \times [c,d) \ ; \ (x,y,z) \in E \}$$

è MISURABILE

N.B.

$$E := \{ e \le z \le \ell \ ; \ (x,y) \in E_z \}$$



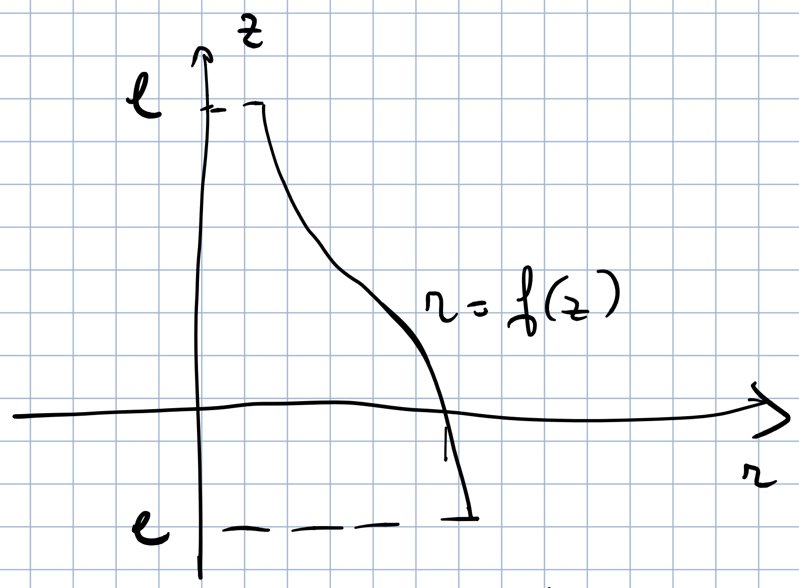
$$\int_E f(x,y,z)\, dx\,dy\,dz = \int_e^\ell dz \int_{E_z} f(x,y,z)\, dx\, dy$$

in particolare

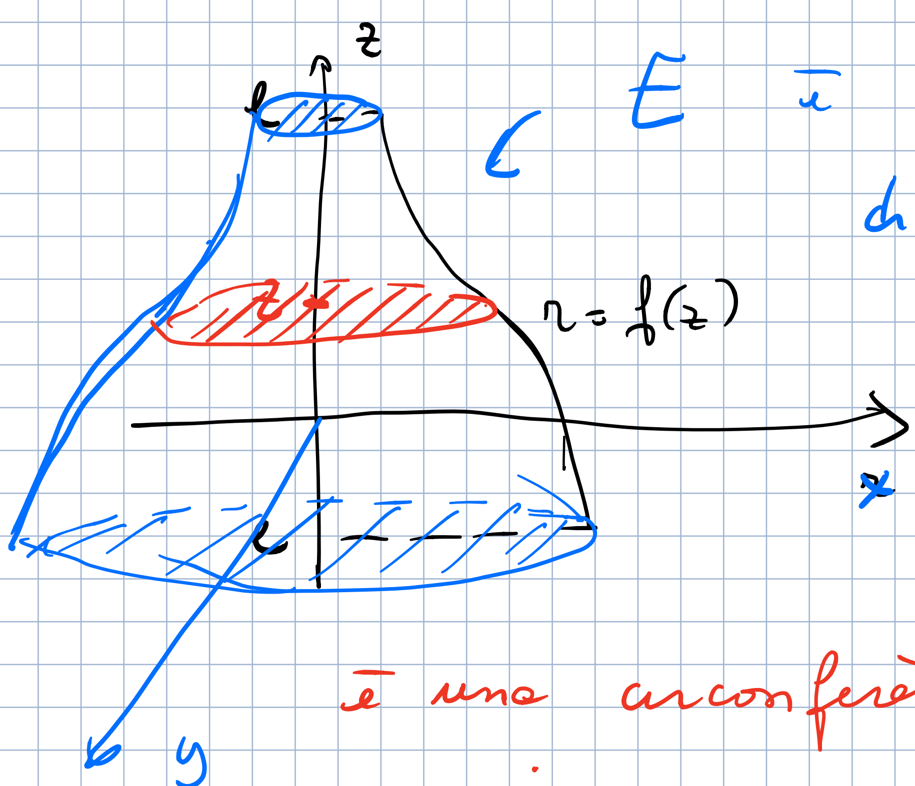
$$m(E) = \int_e^\ell m(E_z)\, dz$$

data $f(z) \ge 0$ def. per $e \le z < \ell$

$$E := \{ (x,y,z) \ : \ e \le z \le \ell \ ; \ x^2+y^2 \le f^2(z) \}$$



ruoto intorno all'asse z ed ottengo E



E è un solido di rotazione

E_z è la superficie in ROSSO

è una circonferenza di raggio $r = f(z)$

$$m(E_z) = \int_{E_z} dx\,dy = \pi f^2(z) \quad (\text{area della circ})$$

$$m(E) = \int_{e}^{\ell} \pi f^2(z)\, dz \qquad \blacksquare$$

Esempio: sia E solido descritto sopra su cui si distribuisca la densità di massa $\rho(z)$.

Calcolare (1) Massa di E

(2) Baricentro di E

(3) Momento di inerzia rispetto all'asse $\hat{z}$.

(1) $$\pi \int_{e}^{\ell} \rho(z) f^2(z)\, dz$$

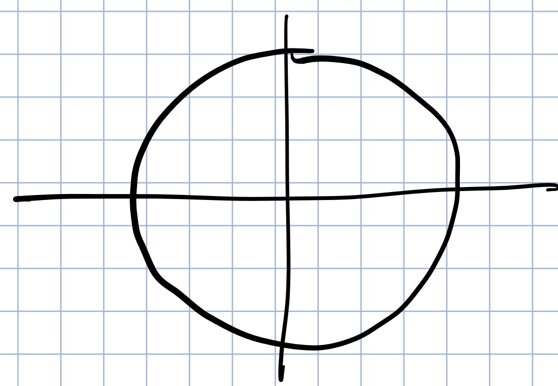
(2) $$B_x = \int_{e}^{\ell} dz \int_{E_z} x\, dx\, dy = 0$$

idem $$\int_{E_z} y\, dx\, dy = 0$$

$$E_z = x^2+y^2 \le f(z)$$

$$-f(z) \le x \le f(z) \; ; \; -\sqrt{f-x^2} \le y \le +\sqrt{f(z)-x^2}$$

$$\int_{-f(z)}^{f(z)} dx \left(x \int_{-\sqrt{f(z)-x^2}}^{+\sqrt{f(z)-x^2}} dy \right) =$$



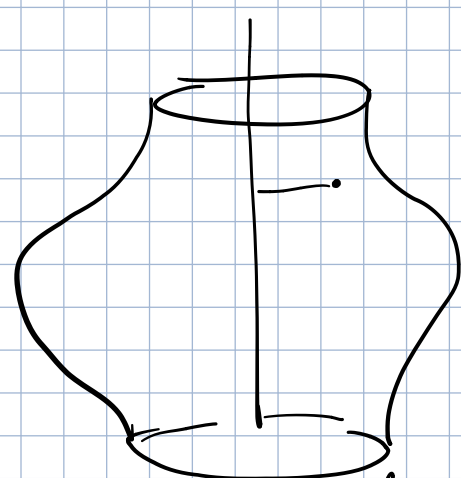
$$= 2\int_{-f(z)}^{f(z)} x \sqrt{f(z)-x^2} = 0$$

(è dispari!)

$B_x = B_y = 0$ $\qquad$ $B_z = \pi \int_e^l \rho(z)\, z\, f^2(z)\, dz$

(3)

$$I = \int_e^l \rho(z)\, dz \int_{E_z} (x^2+y^2)\, dx\,dy$$



(vedi coord. polari)

$$= \int_e^l \rho(z)\, dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{f(z)} r^3\, dr = \frac{\pi}{2} \int_e^l \rho(z) f^4(z)$$