2 Teorema fondamentale del calcolo

Il risultato più importante relativo al calcolo differenziale e integrale è senz'altro il seguente risultato, la cui dimostrazione è, a questo punto, straordinariamente semplice.

Definizione 8.18 *Sia E un intervallo, $x_0 \in E$ e $f \in \mathcal{R}(E)$. Chiamiamo* **funzione integrale di f con punto base x_0** *la funzione definita come*

$$x \in E \mapsto F(x) = F(x;x_0) := \int_{x_0}^{x} f \ . \tag{8.40}$$

Teorema 8.19 (Teorema fondamentale del calcolo – parte I)
Sia E un intervallo, $x_0 \in E$ e $f \in \mathcal{R}(E)$ continua in $y \in E$. Allora, la funzione integrale $x \to F(x) := F(x;x_0)$ è derivabile in y e si ha $F'(y) = f(y)$.

Dimostrazione Calcoliamo il rapporto incrementale di F in y: per ogni h tale che $y+h \in E$ si ha

$$\begin{aligned}
\frac{F(y+h)-F(y)}{h} &\overset{(8.40)}{=} \frac{1}{h}\Big(\int_{x_0}^{x_0+h} f \ - \ \int_{x_0}^{y} f\Big) \overset{(8.27)}{=} \frac{1}{h}\Big(\int_{x_0}^{x_0+h} f \ + \ \int_{y}^{x_0} f\Big)\\
&\overset{(8.28)}{=} \frac{1}{h}\int_{y}^{y+h} f = f(y) + \frac{1}{h}\int_{y}^{y+h}\big(f - f(y)\big)\\
&= f(y) + \alpha(h) \ , \qquad \text{con} \quad \alpha(h) := \frac{1}{h}\int_{y}^{y+h}\big(f-f(y)\big) \ .
\end{aligned}$$

La tesi è dunque equivalente a mostrare che $\lim_{h\to 0}\alpha(h) = 0$ e questo segue dalla continuità di f in y (ipotesi che ancora non abbiamo usato). Sia $\varepsilon > 0$ tale che $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ per ogni $x \in E$ con $0 < |x-y| < \delta$, sia $0 < |h| < \delta$ (con $y+h \in E$) e sia $I_h \subseteq E$ l'intervallo aperto di estremi y e $y+h$. Se $x \in I_h$, si ha $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Dunque:

$$|\alpha(h)| = \frac{1}{|h|}\Big|\int_{I_h}\big(f-f(y)\big)\Big| \le \frac{1}{|h|}\int_{I_h}\big|f-f(y)\big| \le \frac{1}{|h|}\int_{I_h}\varepsilon = \varepsilon. \quad \blacksquare$$

Definizione 8.20 *Se $g : A \to \mathbb{R}$ e $a, b \in A$ denotiamo $[g]_a^b := g(b) - g(a)$ l'***incremento di g tra a e b.**

Corollario 8.21 (Teorema fondamentale del calcolo – parte II)
Sia f una funzione continua su un intervallo E.
(i) *Per ogni $x_0 \in E$ la funzione integrale F in (8.40) è una primitiva di f su E.*
(ii) *Se $G : E \to \mathbb{R}$ è una primitiva di f su E e F è la funzione integrale in (8.40) allora*

$$G(x) = G(x_0) + F(x;x_0) \ , \qquad \forall x \in E \ , \tag{8.41}$$

e, per ogni $a, b \in E$, si ha

$$\int_a^b f = G(b) - G(a) = [G]_a^b \ . \tag{8.42}$$

(iii) *Se $g \in C^1(E)$, allora, per ogni $a, b \in E$, si ha*

$$\int_a^b g' = g(b) - g(a) = [g]_a^b \ . \tag{8.43}$$

Dimostrazione (i) è conseguenza immediata della Proposizione 8.15 e del Teorema 8.19.
(ii): Poiché G e F sono due primitive di f si ha che $G = F + c$ per una costante c; ma $F(x_0, x_0) = 0$ e quindi $G(x_0) = c$ e (8.41) segue. Infine, poiché F e G differiscono per una costante, si ha $G(b) - G(a) = F(b) - F(a)$ e dunque

$$G(b) - G(a) = F(b, x_0) - F(a, x_0) = \int_{x_0}^{b} f - \int_{x_0}^{a} = \int_{x_0}^{b} f + \int_{a}^{x_0} = \int_{a}^{b} f \ .$$

(iii) segue immediatamente da (8.42) con $f = g'$ e $G = g$ (essendo, ovviamente, g una primitiva di g'). Si noti che, poiché $a, b \in E$, g' è continua sull'intervallo chiuso I di estremi a e b (e quindi integrabile su I). ∎

Osservazione 8.22 (i) Il Corollario 8.21 mostra (come preannunciato nel Cap. 7, Osservazione 7.33–(iv)) che una funzione continua su un intervallo ha sempre una primitiva.
(ii) La formula (8.42) permette dunque di calcolare l'integrale di Riemann per tutte le funzioni di cui si sanno calcolare le primitive: questa è naturalmente l'applicazione più importante del calcolo delle primitive sviluppato nel Cap. 7.
(iii) Usando la notazione del § 5–Cap 7 e denotando con $\int f$ una[12] primitiva di f, si ha che

$$\int_a^b f = \Big[\int f\Big]_a^b \ , \quad \text{o anche :} \quad \int_a^b f(x)dx = \Big[\int f(x)dx\Big]_a^b \ , \tag{8.44}$$

formule che giustificano il nome "integrale indefinito" per la primitiva $\int f$ e di "integrale definito" per l'integrale di Riemann $\int_a^b f$.
(iv) Si noti che nei risultati di questo paragrafo, l'intervallo E non è necessariamente limitato.

Esercizio 8.5 Si dimostri il seguente "teorema della media integrale":
Sia f continua sull'intervallo E, siano $a, b \in E$, $a \neq b$, e sia I l'intervallo aperto di estremi a e b. Allora,

$$\exists\ x \in I \ \big|\ f(x) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f \ . \tag{8.45}$$

Suggerimento: poiché $\frac{1}{b-a}\int_a^b f = \frac{1}{a-b}\int_b^a f$ si può assumere che $a < b$. In tal caso si ha $(\inf_I f)(b-a) \le \int_b^a f \le (\sup_I f)(b-a)$. Si usi ora il teorema del valor medio per funzioni continue osservando che $\frac{1}{b-a}\int_a^b f \in \big[\inf_I f, \sup_I f\big]$.

2.1 Integrazione per parti

Corollario 8.23 (Integrazione per parti) *Siano $f, g \in C^1(E)$ con E intervallo e siano $a, b \in E$. Allora,*

$$\int_a^b f'g = [fg]_a^b - \int_a^b fg' \ . \tag{8.46}$$

[12] Si ricordi l'Osservazione 7.38.

Dimostrazione Dal Teorema fondamentale del calcolo e dalla regola di derivazione del prodotto segue che

$$[fg]_a^b \overset{(8.43)}{=} \int_a^b (fg)' = \int_a^b (f'g + fg') = \int_a^b f'g \ + \int_a^b fg' \ . \quad \blacksquare$$

Osservazione 8.24 Naturalmente, il Corollario 8.23 si può dedurre dalla formula analoga per le primitive (Proposizione 7.36).

2.2 Cambio di variabile nell'integrazione

Corollario 8.25 (Cambio di variabile) *Siano E, I intervalli, $f \in C(E)$, $\varphi \in C^1(I)$ e $\varphi(I) \subseteq E$. Allora, per ogni $\alpha, \beta \in I$, si ha*

$$\int_a^b f = \int_\alpha^\beta f \circ \varphi \ \cdot \varphi' \ , \qquad a = \varphi(\alpha),\ b = \varphi(\beta) \ . \tag{8.47}$$

Dimostrazione Si fissi $x_0 \in E$ e sia $F(x) = F(x; x_0)$ la funzione integrale(8.40) di f con punto base x_0. Allora, dal Teorema fondamentale del calcolo e dalla regola della catena segue che

$$\int_\alpha^\beta f \circ \varphi \ \cdot \varphi' = \int_\alpha^\beta F' \circ \varphi \ \cdot \varphi' = \int_\alpha^\beta (F \circ \varphi)' \overset{(8.43)}{=} [F \circ \varphi]_\alpha^\beta = [F]_a^b \overset{(8.42)}{=} \int_a^b f \ . \quad \blacksquare$$

Osservazione 8.26 (i) Se riscriviamo la formula (8.47) nella notazione classica e denotiamo la funzione $t \in I \mapsto \varphi(t) = x(t) \in E$ si ha

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f\big(x(t)\big)x'(t)dt \ , \qquad a = \varphi(\alpha),\ b = \varphi(\beta) \ , \tag{8.48}$$

dunque: nel "cambio di variabile" $x = x(t)$, si calcola la funzione f nella nuova variabile, gli estremi α e β sono due punti che "corrispondono" a a e b, rispettivamente, e il "dx" va sostituito con $x'(t)dt = \frac{dx}{dt}\, dt$ che suggerisce l'identità formale

$$dx = x'(t)dt = \frac{dx}{dt}\ dt \ . \tag{8.49}$$

(ii) Sebbene abbiamo chiamato il Corollario 8.25 "cambio di variabile", non abbiamo assunto che la funzione φ sia biunivoca o iniettiva e può, ad esempio capitare che ci siano più punti α, α',... diversi tar loro tali che $a = \varphi(\alpha) = \varphi(\alpha') = ...$, mentre, se φ è invertibile allora esisteranno due soli punti $\alpha = \varphi^{-1}(a)$ e $\beta = \varphi^{-1}(b)$ per cui vale la (8.47).
(iii) Anche per il Corollario 8.25 vale la stessa osservazione fatta per l'integrazione per parti: ossia esso può essere dedotto dalla formula analoga per le primitive (Proposizione 7.37).

Esempio 8.27 Dimostriamo che

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\ dx = \frac{\pi}{2} \ . \tag{8.50}$$

Infatti, (in corrispondenza di alcune uguaglianze ci sono delle note esplicative):

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}dx &\overset{(8.28)}{=} \int_{-1}^{0}\sqrt{1-x^2}dx+\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx\\
&\overset{(a)}{=} -\int_1^0\sqrt{1-t^2}dt+\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx\\
&\overset{(8.14)}{=} \int_0^1\sqrt{1-t^2}dt+\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx=2\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx\\
&\overset{(b)}{=} 2\int_0^{\pi/2}|\cos t|\cos t\ dt \overset{(c)}{=} 2\int_0^{\pi/2}\cos^2 t dt\\
&= \int_0^{\pi/2}(1+\cos 2x)dx=\int_0^{\pi/2}dx+\int_0^{\pi/2}\cos 2x\ dx\\
&\overset{(d)}{=} \frac{\pi}{2}+\left[\frac{\operatorname{sen} 2x}{2}\right]_0^{\pi/2}=\frac{\pi}{2}\ .
\end{aligned}$$

(a): cambio di variabile $x=-t$ nel primo integrale.
(b): cambio di variabile $x=\operatorname{sen} t$.
(c): tra 0 e $\pi/2$, $\cos t\geq 0$.
(d): una primitiva di $\cos 2x$ è $\frac{\operatorname{sen} 2x}{2}$ e poi usiamo il Teorema fondamentale del calcolo (8.42).

Osservazione 8.28 (Simmetrie nell'integrazione) In matematica, così come in fisica, le simmetrie sono di fondamentale importanza e questo si riflette anche nell'integrazione semplificando, a volte, i calcoli. Vediamone due esempi:

- Se $f\in\mathcal{R}\big((-a,a)\big)$, $a>0$, è una funzione pari si ha

$$\int_{-a}^{a}f(x)\,dx=2\int_0^a f(x)\,dx\ ,\qquad \big(f(-x)=f(x)\big)\ . \tag{8.51}$$

  Infatti

$$\begin{aligned}
\int_{-a}^{a}f(x)dx &= \int_{-a}^{0}f(x)\,dx\ +\int_0^a f(x)\,dx=-\int_a^0 f(t)\,dt+\int_0^a f(x)\\
&= \int_0^a f(t)\,dt+\int_0^a f(x)\\
&= 2\int_0^a f\ .
\end{aligned}$$

  Con un calcolo del tutto analogo si vede invece che se $f\in\mathcal{R}\big((-a,a)\big)$, $a>0$, è una funzione dispari, allora

$$\int_{-a}^{a}f(x)\,dx=0\ ,\qquad \big(f(-x)=-f(x)\big)\ . \tag{8.52}$$

- Se $f\in\mathcal{R}\big((-a,a)\big)$ per ogni $a>0$ ed è periodica di periodo $T>0$, allora

$$\int_a^{a+T}f(x)\,dx=\int_0^T f(x)\,dx\ ,\qquad \big(f(x+T)=f(x)\big)\ . \tag{8.53}$$

Infatti, si ha

$$\begin{aligned}\int_a^{a+T} f(x)\,dx &\overset{(8.28)}{=} \int_a^0 f(x)\,dx + \int_0^{a+T} f(x)\,dx\\ &\overset{(a)}{=} \int_{a+T}^{T} f(t-T)\,dt + \int_0^{a+T} f(x)\,dx\\ &\overset{(b)}{=} \int_{a+T}^{T} f(t)\,dt + \int_0^{a+T} f(x)\,dx\\ &\overset{(8.28)}{=} \int_0^{T} f(t)\,dt\end{aligned}$$

(a): cambio di variabile $x = t - T$ nel primo integrale.
(b): essendo f periodica di periodo T, si ha anche $f(t + mT) = f(t)$ per ogni t e per ogni $m \in \mathbb{Z}$ (qui $m = -1$).

3 Aree

Abbiamo visto (Esempio 8.5–(i)) che l'integrale della funzione costante $f(x) \equiv h > 0$ tra a e b ($a < b$) è $(b-a)h$ che per la geometria euclidea è l'area del rettangolo di base $(b-a)$ e altezza h. Allo stesso modo (Osservazione 8.6), possiamo interpretare (se $f \geq 0$) i numeri $\underline{S}_E(f,\mathrm{P})$ e $\overline{S}_E(f,\mathrm{P})$ come "aree" di unioni di "multi–rettangoli" R_1 e R_2:

$$R_1 \subseteq \{(x,y)\big|\, x \in E, 0 \leq y \leq f(x)\} \subseteq R_2\ ,$$

dove R_1 è l'unione dei rettangoli di base $I_j \in \mathrm{P}$ e altezza $\inf_{I_j} f$ e R_2 è l'unione dei rettangoli di base $I_j \in \mathrm{P}$ e altezza $\sup_{I_j} f$. *Questa idea, in effetti, è alla base di una definizione rigorosa di area per domini "normali":*

Definizione 8.29 (i) *Siano $g \leq f$ due funzioni integrabili sull'intervallo limitato E. Chiamiamo* **dominio normale (di base E tra g e f)** *la seguente regione di $\mathbb{R}^2$*

$$D_{g,f} := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\big|\, x \in E\ ,\ g(x) \leq y \leq f(x)\}\ , \tag{8.54}$$

e definiamo la sua **area** *come*

$$\mathrm{area}\,(D_{g,f}) := \int_E (f-g)\ . \tag{8.55}$$

Nel caso $g = 0$ poniamo $D_f := D_{0,f}$.
(ii) *Se un insieme $D \subseteq \mathbb{R}^2$ limitato è unione disgiunta di un numero finito di domini normali D_i, $D = D_1 \cup \cdots \cup D_n$, poniamo*

$$\mathrm{area}\,(D) := \sum_{j=1}^{n} \mathrm{area}\,(D_j)\ . \tag{8.56}$$

Osservazione 8.30 (i) Secondo questa definizione, se $f \geq 0$, $\mathrm{P} \in \mathcal{P}(E)$, e R_1 e R_2 sono, rispettivamente, l'unione dei rettangoli di base $I_j \in \mathrm{P}$ e altezza $\inf_{I_j} f$ e l'unione dei rettangoli di base $I_j \in \mathrm{P}$ e altezza $\sup_{I_j} f$, abbiamo che

$$\mathrm{area}\,(R_1) = \underline{S}_E(f,\mathrm{P}) \leq\ \mathrm{area}\,(D_f) \leq \overline{S}_E(f,\mathrm{P}) =\ \mathrm{area}\,(R_2)$$

e raffinando le partizioni di E si ha che l'area di D_f, ossia l'area "sottesa dal grafico di f", è l'elemento separatore delle aree dei multi-rettangoli contenuti in D_f e delle aree dei multi-rettangoli che contengono D_f.

(ii) Non è difficile verificare che la formula (8.56) *non dipende* dal particolare modo in cui D viene scomposto in unione disgiunta di domini normali (e che quindi la definizione è ben posta): vedi Esercizio 8.6 a fine paragrafo.

Non sorprenderà certo il seguente famoso risultato.

Teorema 8.31 (Area del cerchio) *Sia $r > 0$, $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ e*

$$C_r(x_0, y_0) := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \middle| \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \le r\right\} . \tag{8.57}$$

Allora $C_r(x_0, y_0)$ è un dominio normale e $\text{area}\,\big(C_r(x_0, y_0)\big) = \pi r^2$.

Naturalmente, $C_r(x_0, y_0)$ è (per definizione) **il cerchio di centro** (x_0, y_0) **e raggio** r.

Dimostrazione La disuguaglianza $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \le r$ che definisce $C_r(x_0, y_0)$ è equivalente alla disuguaglianza $(y - y_0)^2 \le r^2 - (x - x_0)^2$, che, a sua volta, è equivalente alle disuguaglianze

$$\begin{cases} |y - y_0| \le \sqrt{r^2 - (x - x_0)^2} \\ |x - x_0| \le r \end{cases}$$

che possiamo riscrivere come

$$\begin{cases} g(x) := y_0 - \sqrt{r^2 - (x - x_0)^2} \le y \le f(x) := y_0 + \sqrt{r^2 - (x - x_0)^2} \\[2ex] x_0 - r \le x \le x_0 + r \ . \end{cases}$$

Ma tali relazioni significano che $C_r(x_0, y_0)$ è un dominio normale con base $E := [x_0 - r, x_0 + r]$ tra le funzioni (integrabili) g ed f. Dunque, dalla definizione di area, e facendo nella quarta uguaglianza il cambio di variabile $x = x_0 + rt$, segue che

$$\begin{aligned} \text{area}\,\big(C_r(x_0, y_0)\big) \quad &:= \quad \int_E (f - g) = 2 \int_{x_0 - r}^{x_0 + r} \sqrt{r^2 - (x - x_0)^2}\ dx \\ &= \quad 2r \int_{x_0 - r}^{x_0 + r} \sqrt{1 - \Big(\frac{x - x_0}{r}\Big)^2}\ dx \\ &= \quad 2r^2 \int_{-1}^{1} \sqrt{1 - t^2}\ dt \\ &\overset{(8.50)}{=} \quad 2r^2\ \frac{\pi}{2} = \pi r^2 \ . \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Esercizio 8.6 (i) Dimostrare che se D_1 e D_2 sono due domini normali con $D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$, allora $D_1 \cap D_2$ è un dominio normale.

(ii) Dimostrare che la definizione data in (ii) è ben posta, ossia che se $D = D'_1 \cup \cdots \cup D'_m$ è un'altra decomposizione di D in domini normali a due a due disgiunti allora

$$\sum_{j=1}^{n} \text{area}\,(D_j) = \sum_{j=1}^{m} \text{area}\,(D'_j) \ .$$

Suggerimento: Come fatto per le partizioni si considerino gli insieme $D_{ij} := D_i \cap D'_j$ (con i e j tali che $D_i \cap D'_j \neq \emptyset$).