4 Altre conseguenze del Teorema fondamentale del calcolo

4.1 Formula di Taylor con resto integrale

Dal Teorema fondamentale del calcolo segue una nuova dimostrazione della formula di Taylor – *indipendente dal* § 9.2 – con una formula esplicita per il resto.

Lemma 8.35 *Sia $n \geq 1$ e $F \in C^n([0,1])$. Allora,*

$$F(1) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{F^{(k)}(0)}{k!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^{n-1}}{(n-1)!} F^{(n)}(t)dt \ . \tag{8.60}$$

Dimostrazione Dimostriamo il lemma per induzione. Per $n = 1$, la (8.60) diviene $F(1) = F(0) + \int_0^1 F'(t)dt$ che segue dal Teorema fondamentale del calcolo. Assumiamo che (8.60) valga per $n \geq 1$ e dimostriamola per $n+1$. Integrando per parti si ha:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{(1-t)^{n-1}}{(n-1)!} F^{(n)}(t)dt &= \left[-\frac{(1-t)^n}{n!} F^{(n)} \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} F^{(n+1)}(t)dt \\ &= \frac{F^{(n)}(0)}{n!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} F^{(n+1)}(t)dt \ , \end{aligned}$$

che assieme a (8.60) implica la (8.60) con $n+1$ al posto di n. ∎

Proposizione 8.36 (Formula di Taylor con resto integrale) *Se f è derivabile $(n+1)$ volte vicino a x_0 allora, per ogni x vicino a x_0 si ha*

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \ (x-x_0)^k + R_n(x;x_0) \qquad \text{con :} \\ & R_n(x;x_0) = (x-x_0)^{(n+1)} \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} f^{(n+1)}\big(x_0 + t(x-x_0)\big)dt \\ & \qquad\qquad = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x f^{(n+1)}(y) \ (x-y)^n dy \ . \end{aligned} \tag{8.61}$$

Dimostrazione La tesi segue dal Lemma ponendo $F(t) := f\big(x_0 + t(x-x_0)\big)$ ed osservando che $F^{(k)}(t) = f^{(k)}\big(x_0 + t(x-x_0)\big) \cdot (x-x_0)^k$ per ogni $0 \leq k \leq n+1$; l'uguaglianza tra i due integrali nella (8.61) segue dal cambio di variabile $y = x_0 + t(x-x_0)$. ∎

Si noti che se $f \in C^{n+1}(I)$ con I intervallo compatto contenente x_0 allora[13]

$$\begin{aligned} |R_n(x;x_0)| &\overset{(8.61)}{\leq} |x-x_0|^{(n+1)} \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} \big| f^{(n+1)}\big(x_0 + t(x-x_0)\big)\big| dt \\ &\leq \sup_I |f^{(n+1)}| \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} dt = \frac{\sup_I |f^{(n+1)}|}{(n+1)!} \ , \end{aligned} \tag{8.62}$$

riottenendo la (7.122).

[13]Si noti che $\int_0^1 (1-t^n)dt = 1/(n+1)$.

4.2 Funzioni C^∞ a supporto compatto

Definizione 8.37 *Sia $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Il* **supporto di** *$f$, $\mathrm{supp}\,(f)$, è il più piccolo insieme chiuso al di fuori del quale f è nulla:*

$$\mathrm{supp}\,(f) := \overline{\{x \in A \big|\, f(x) \neq 0\}}\ . \tag{8.63}$$

Una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R}$ si dice **a supporto compatto** *se il suo supporto è un insieme compatto. Se $k \in \mathbb{N}_0$ (o $k = \infty$) ed E è intervallo chiuso, $C^k(E)$ denota lo spazio vettoriale delle funzioni f a supporto compatto con $\mathrm{supp}\,(f) \subseteq E$.*

Il Teorema fondamentale del calcolo permette di costruire facilmente molte funzioni $C^\infty_{\rm c}(\mathbb{R})$, ad esempio si possono costruire delle approssimazioni C^∞ a funzione caratteristiche di intervalli, nel senso della seguente

Proposizione 8.38 *Sia*

$$\begin{aligned} \varphi_0(x) \ &:= \ \begin{cases} e^{-\frac{1}{x(1-x)}}\ , & \text{se } 0 < x < 1 \\ 0\ , & \text{altrimenti} \end{cases} \\ \psi(x) \ &:= \ \frac{1}{c_0}\int_0^x \varphi_0(t)dt \quad \text{con} \quad c_0 := \int_0^1 \varphi_0(t)dt > 0\ , \end{aligned} \tag{8.64}$$

e, per $\delta > 0$ e $I := [a, b]$, sia

$$\psi_{I,\delta}(x) := \psi\Big(\frac{x-a}{\delta} + 1\Big) \cdot \psi\Big(\frac{b-x}{\delta} + 1\Big)\ . \tag{8.65}$$

Allora,

(i) $\psi_{I,\delta} \in C^\infty_{\rm c}(\mathbb{R})$

(ii) $\mathrm{supp}\,(\psi_{I,\delta}) = [a-\delta, b+\delta]$

(iii) $\psi_{I,\delta}(x) = 1$ *per ogni $x \in I$*

(iv) $\psi'_{I,\delta}(x) > 0$ *per ogni $x \in (a-\delta, a)$ e $\psi'_{I,\delta}(x) < 0$ per ogni $x \in (b, b+\delta)$.*

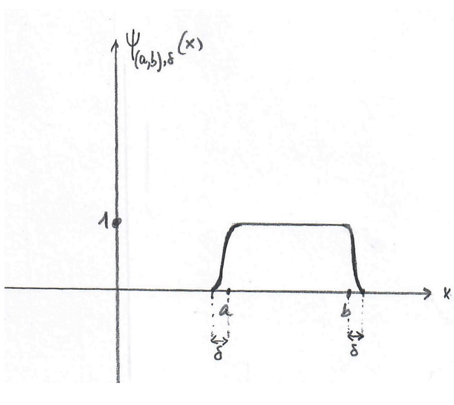

Figura 8.2: Grafico della funzione $\psi_{I,\delta}$

Dimostrazione Se φ è la funzione definita in (7.104) si ha che $\varphi_0 = \varphi(x) \cdot \varphi(1-x)$ e quindi dall'Esercizio 7.24 segue che $\varphi_0 \in C_c^\infty(\mathbb{R})$. Inoltre si ha che $\varphi_0(x) > 0$ se e solo se $x \in (0,1)$, ossia $\operatorname{supp}(\varphi_0) = [0,1]$.

Se $x < 0$, essendo $\varphi_0(x) = 0$, si ha che $\int_0^x \varphi_0(t)dt = -\int_{-|x|}^0 \varphi_0(t)dt = 0$, mentre se $x \geq 1$ (essendo $\varphi_0(x) = 0$), $\psi(x) = \psi(1) = 1$. Inoltre, dal Teorema fondamentale del calcolo, segue che $\psi'(x) = \varphi_0(x)/c_0$ (che implica che $\psi \in C^\infty$). Riassumendo:

$$\psi \in C^\infty(\mathbb{R}) \ , \quad \psi(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ 1 & \text{se } x \geq 1 \end{cases} \quad , \quad \psi'(x) > 0 \ \forall x \in (0,1) \ . \tag{8.66}$$

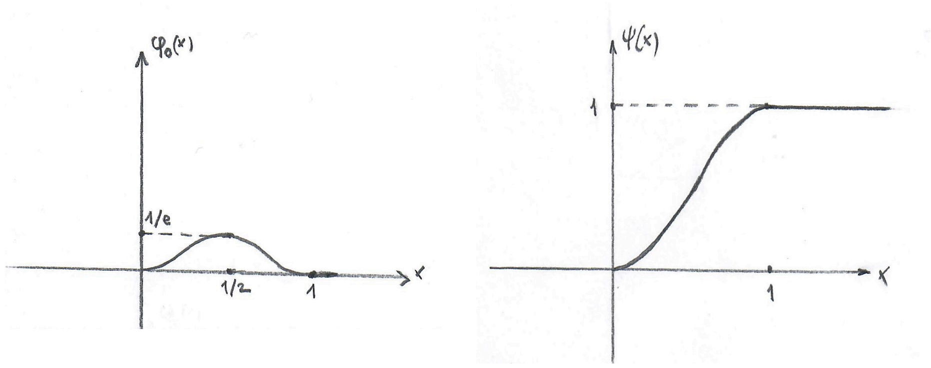

Figura 8.3: Grafici delle funzioni φ_0 e ψ

Da (8.66) segue, poi, che

$$\begin{aligned}
&\psi\Big(\frac{x-a}{\delta}+1\Big) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq a-\delta \\ 1 & \text{se } x \geq a \end{cases} \ , \\
&\frac{d}{dx}\psi\Big(\frac{x-a}{\delta}+1\Big) = \frac{1}{\delta}\psi'\Big(\frac{x-a}{\delta}+1\Big) > 0 \ , \forall\ x \in (a-\delta, a) \ , \\
&\psi\Big(\frac{b-x}{\delta}+1\Big) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \leq b \\ 0 & \text{se } x \geq b+\delta \end{cases} \ , \\
&\frac{d}{dx}\psi\Big(\frac{b-x}{\delta}+1\Big) = -\frac{1}{\delta}\psi'\Big(\frac{b-x}{\delta}+1\Big) < 0 \ , \forall\ x \in (b, b+\delta) \ .
\end{aligned}$$

Da tali relazioni segue facilmente la tesi. ∎