5 Integrali generalizzati

In questo paragrafo presentiamo una generalizzazione dell'integrale di Riemann che permette, in particolare, di trattare funzioni o intervalli non limitati.

5.1 Definizione ed esempi

Definizione 8.39 (Integrale generalizzato) *Siano $a < b$ in $\mathbb{R}^*$ e sia $f : (a,b) \to \mathbb{R}$. Diremo che f* **è integrabile (secondo Riemann) in senso generalizzato su** (a,b) *se $f \in \mathcal{R}([\alpha,\beta])$ per ogni $a < \alpha < \beta < b$ e se, comunque fissato $x_0 \in (a,b)$ esistono finiti i limiti*

$$\lim_{\alpha\to a+} \int_\alpha^{x_0} f(x)\,dx \ , \qquad \lim_{\beta\to b-} \int_{x_0}^{\beta} f(x)\,dx \ . \tag{8.67}$$

In tal caso poniamo

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{\alpha\to a+} \int_\alpha^{x_0} f(x)\,dx + \lim_{\beta\to b-} \int_{x_0}^{\beta} f(x)\,dx \ . \tag{8.68}$$

La classe delle funzioni integrabili in senso generalizzato su $I = (a,b)$ verrà denotata con $\mathcal{R}^*(I)$.

Osservazione 8.40 (i) Poiché, per ogni x_0 e x_1 in (a,b),

$$\int_\alpha^{x_1} f = \int_\alpha^{x_0} f + \int_{x_0}^{x_1} f \ , \qquad \int_{x_1}^{\beta} f = \int_{x_0}^{\beta} f + \int_{x_1}^{x_0} f = \int_{x_0}^{\beta} f - \int_{x_0}^{x_1} f$$

si vede subito che la definizione è ben posta, ossia che la condizione in (8.67) non dipende dalla particolare scelta di x_0 e che il valore in (8.68) è indipendente dalla scelta di $x_0 \in (a,b)$.
(ii) Se $I = (a,b)$ è un intervallo aperto e limitato, $f \in \mathcal{R}(I)$, allora $f \in \mathcal{R}^*(I)$ e il valore degli integrali (in senso standard e in senso generalizzato) coincidono. Infatti, se $x_0, \beta \in (a,b)$, e[14] $M = \sup_{(a,b)} |f|$,

$$\int_{x_0}^{\beta} f = \int_{x_0}^{b} f + \int_{b}^{\beta} f = \int_{x_0}^{b} f - \int_{\beta}^{b} f$$

e

$$\lim_{\beta\to b-} \Big|\int_\beta^b f\Big| \le \lim_{\beta\to b-} M\int_\beta^b 1 = \lim_{\beta\to b-} M(b-\beta) = 0 \ ; \tag{8.69}$$

quindi:

$$\lim_{\beta\to b-} \int_{x_0}^{\beta} f = \int_{x_0}^{b} f \ , \qquad \forall\ f \in \mathcal{R}\big((a,b)\big) \ , \tag{8.70}$$

Analogamente,

$$\lim_{\alpha\to a+} \int_{\alpha}^{x_0} f = \int_{a}^{x_0} f \ , \qquad \forall\ f \in \mathcal{R}\big((a,b)\big) \ . \tag{8.71}$$

Dunque, *l'integrale in senso generalizzato è una estensione della nozione standard di integrale di Riemann ad intervalli aperti eventualmente non limitati e a funzioni eventualmente non limitate.*

(iii) Chiaramente se $f \in \mathcal{R}^*(I)$ allora $f \in \mathcal{R}^*(J)$ per ogni intervallo $J \subseteq I$.

[14] Essendo f integrabile su (a,b), è limitata su (a,b) e quindi $\sup_{(a,b)} |f| < \infty$.

(iv) La teoria degli integrali generalizzati ha molte analogie con la teoria delle serie. Ad esempio, abbiamo visto che una serie ha le code che tendono a zero (Proposizione 4.6–(iii)); un risultato analogo vale per gli integrali generalizzati:

siano $a < b$ in $\mathbb{R}^*$ e $f \in \mathcal{R}^*((a,b))$. Allora

$$\lim_{\alpha\to a+}\int_a^\alpha f = \lim_{\beta\to b-}\int_\beta^b f = 0\ , \qquad \Big(f \in \mathcal{R}^*((a,b))\Big)\ . \tag{8.72}$$

Infatti, se $x_0 \in (a,b)$, $\displaystyle\int_\beta^b f = \Big(\int_{x_0}^b f - \int_{x_0}^\beta f\Big) \to 0$ quando $\beta \to b-$, e analogamente per l'estremo sinistro.

(v) Come per serie, se $f \geq 0$, l'integrale generalizzato di f su (a,b) (con $f \in \mathcal{R}([\alpha,\beta])$ per ogni $a < \alpha < \beta < b$) o converge o diverge[15] essendo la funzione integrale $y \to F(y;x_0)$ una funzione monotona crescente.

(vi) Spesso, in altri testi, l'integrale di Riemann generalizzato viene chiamato "integrale di Riemann in senso improprio".

Esempio 8.41 (L'integrale di x^α)

(i) Sia $I = (0,1)$, e $\alpha \in \mathbb{R}$, e consideriamo la funzione $x \to x^\alpha$. Poiché tale funzione appartiene a $\mathcal{R}((\varepsilon,1))$ per ogni $0 < \varepsilon < 1$, in vista dell'Osservazione 8.40–(ii), dobbiamo studiare solo il $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0+}\int_\varepsilon^1 x^\alpha dx$. Ora, per $\alpha \neq -1$ si ha

$$\lim_{\varepsilon\to 0+}\int_\varepsilon^1 x^\alpha dx = \lim_{\varepsilon\to 0+}\left[\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]_\varepsilon^1 = \begin{cases} 1/(\alpha+1)\ , & \text{se } \alpha > -1 \\ +\infty\ , & \text{se } \alpha < -1 \end{cases}$$

mentre per $\alpha = -1$,

$$\lim_{\varepsilon\to 0+}\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x}dx = \lim_{\varepsilon\to 0+}[\log x]_\varepsilon^1 = +\infty\ .$$

Dunque $x^\alpha \in \mathcal{R}^*((0,1))$ *se e solo se* $\alpha > -1$.

(ii) Consideriamo di nuovo la funzione $x \to x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, sull'intervallo $(1,+\infty)$. In tal caso troviamo:

$$\begin{aligned} \lim_{b\to+\infty}\int_1^b x^\alpha dx &= \lim_{b\to+\infty}\left[\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]_1^b = \begin{cases} +\infty\ , & \text{se } \alpha > -1 \\ 1/|\alpha+1|\ , & \text{se } \alpha < -1 \end{cases} \\ \lim_{b\to+\infty}\int_1^b \frac{1}{x}dx &= \lim_{b\to+\infty}[\log x]_1^b = +\infty \end{aligned}$$

Dunque $x^\alpha \in \mathcal{R}^*((1,+\infty))$ *se e solo se* $\alpha < -1$.

(iii) In particolare, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, $x^\alpha \notin \mathcal{R}^*((0,+\infty))$.

[15] Più precisamente, convergono o divergono i limiti in (8.67).

5.2 Criteri di integrabilità

Proposizione 8.42 (i) **(Criterio del confronto)** *Siano $a, b \in \mathbb{R}^*$ e $0 \le f \le g$ funzioni da $I := (a, b) \to \mathbb{R}$ tali che $f, g \in \mathcal{R}([\alpha, \beta])$ per ogni $a < \alpha < \beta < b$. Se $g \in \mathcal{R}^*(I)$ allora $f \in \mathcal{R}^*(I)$; se $f \notin \mathcal{R}^*(I)$, allora $g \notin \mathcal{R}^*(I)$.*

(ii) **(Criterio del confronto asintotico)** *Sia $a \in \mathbb{R}$, $a < b \in \mathbb{R}^*$ e $0 < f, g$ funzioni da $I := [a, b) \to \mathbb{R}$ tali che $f, g \in \mathcal{R}([a, \beta])$ per ogni $a < \beta < b$. Se $\lim_{x\to b-} f/g = c > 0$ allora $f \in \mathcal{R}^*([a, b))$ se e solo se $g \in \mathcal{R}^*([a, b))$.*

(iii) **(Criterio del confronto con serie)** *Sia $a \in \mathbb{R}$ e $0 < f$ una funzione decrescente da $I := [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ tale che $f \in \mathcal{R}([a, b])$ per ogni $a < b < +\infty$. Allora $f \in \mathcal{R}^*([a, +\infty))$ se e solo se converge la serie a termini positivi $\sum_{n=N}^{\infty} f(n)$ per un qualunque $N \ge a$.*

(iv) **(Criterio di convergenza assoluta)** *Sia $I = (a, b)$ con $a < b$ in $\mathbb{R}^*$ e sia $f \in \mathcal{R}([\alpha, \beta])$ per ogni $a < \alpha < \beta < b$. Supponiamo che $|f| \in \mathcal{R}^*(I)$. Allora $f \in \mathcal{R}^*(I)$ e*

$$\Big|\int_a^b f\Big| \le \int_a^b |f| \ . \tag{8.73}$$

Dimostrazione (i) segue immediatamente dalla relazione

$$0 \le \int_\alpha^\beta f \le \int_\alpha^\beta g$$

valida per ogni $a < \alpha < \beta < b$.

(ii): Dalle ipotesi segue che esiste $x_0 \in (a, b)$ tale che $(c/2)g(x) \le f(x) \le (3c/2)g(x)$ per ogni $x_0 < x < b$ e quindi la tesi segue dal punto (i).

(iii) Poiché la convergenza della serie dipende solo dalla coda, possiamo assumere che $N > \max\{a + 1, 1\}$. Sia, per ogni $n \ge N$, $I_n = [n, n + 1)$. Essendo f decrescente si ha che

$$f(n + 1) = \int_{I_n} f(n + 1)dx \le \int_{I_n} f(x)dx \le \int_{I_n} f(n)dx = f(n) \ , \tag{8.74}$$

e quindi, per ogni $M \ge N$,

$$\sum_{n=N}^{M} f(n + 1) = \sum_{n=N-1}^{M-1} f(n) \le \sum_{n=N}^{M} \int_{I_n} f(x)dx = \int_N^{M+1} f(x)dx \le \sum_{n=N}^{M} f(n) \ .$$

Prendendo il limite per $M \to +\infty$ (si ricordi il punto (v) dell'Osservazione 8.40) si ha la tesi.

(iv) segue dal criterio del confronto (i) ricordando che $f = f_+ - f_-$, $|f| = f_+ + f_-$. ∎

Definizione 8.43 *Se $I = (a, b)$ con $a < b$ in $\mathbb{R}^*$, $f \in \mathcal{R}([\alpha, \beta])$ per ogni $a < \alpha < \beta < b$ e $|f| \in \mathcal{R}^*(I)$, diremo che* **l'integrale di f converge assolutamente su** *I e denoteremo la classe di tali funzioni con $\mathcal{R}^*_1(I)$.*

Osservazione 8.44 (i) Ovviamente vale il risultato analogo del criterio del confronto asintotico anche per l'estremo sinistro.

(ii) Il criterio di convergenza per confronto con serie e l'Esempio 8.41 danno una nuova dimostrazione della convergenza/divergenza della serie di Riemann $\sum 1/n^\alpha$.

(iii) Il criterio di convergenza assoluta implica che $\mathcal{R}^*_1(I) \subseteq \mathcal{R}^*(I)$ (e che in tal caso $|\int_I f| \le \int_I |f|$), ma, in generale, $\mathcal{R}^*_1(I) \subsetneqq \mathcal{R}^*(I)$ come mostra il seguente

Esempio 8.45 Consideriamo la funzione $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ su $I := (0, +\infty)$. Innanzitutto, poiché $\lim_{x\to 0}(\operatorname{sen} x)/x = 1$, f è integrabile su $(0, x_0)$ per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$ e basta studiare il limite $\displaystyle\lim_{a\to+\infty}\int_1^a \frac{\operatorname{sen} x}{x}$. Integrando per parti si ha:

$$\int_1^a \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \left[\frac{-\cos x}{x}\right]_1^a + \int_1^a \frac{\cos x}{x^2}\,dx = \cos 1 - \frac{\cos a}{a} + \int_1^a \frac{\cos x}{x^2}\,, \tag{8.75}$$

ed essendo $|(\cos x)/x^2| \le 1/x^2$, $x \to (\cos x)/x^2 \in \mathcal{R}_1^*((1, +\infty))$. Prendendo il limite per $a \to +\infty$ in (8.75) si ha che

$$\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \cos 1 + \int_1^{\infty} \frac{\cos x}{x^2}\,dx\,, \tag{8.76}$$

mostrando che $f \in \mathcal{R}^*((0, +\infty))$. D'altra parte, sia, per $n \in \mathbb{N}_0$,

$$I_n := [a_n, b_n] := \left[n\pi + \frac{\pi}{4}\,,\ n\pi + \frac{3}{4}\pi\right]\,, \quad \text{e} \quad \alpha := \operatorname{sen} a_n = \operatorname{sen} b_n = \operatorname{sen}\frac{\pi}{4} > 0\,,$$

e si osservi che, per ogni $x \in I_n$, $|\operatorname{sen} x| = \operatorname{sen} x \ge \alpha$, e quindi, se $J_N = \bigcup_{n=0}^N I_n$, si ha, per ogni $N \ge 0$,

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\left|\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right| dx \quad &\ge \quad \int_{J_N} \frac{|\operatorname{sen} x|}{x}\,dx = \sum_{n=0}^{N}\int_{I_n}\frac{|\operatorname{sen} x|}{x}\,dx \\ &\ge \quad \alpha\sum_{n=0}^{N}\int_{I_n}\frac{1}{x}\,dx = \alpha\sum_{n=0}^{N}\log\frac{b_n}{a_n}\,,\end{aligned}$$

e poiché $b_n/a_n \to 1$, la serie diverge e quindi diverge l'integrale. Questo mostra che $f \notin \mathcal{R}_1^*((0, +\infty))$.

Esercizio 8.7 (i) Sia $0 < f \in C^1([a, +\infty))$ una funzione decrescente e tale che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Dimostrare che $f(x)\operatorname{sen} x$ e $f(x)\cos x \in \mathcal{R}([a, +\infty))$.

(ii) Sia g una funzione periodica, integrabile e a media nulla[16]. Dimostrare che una qualunque primitiva di g è periodica (con lo stesso periodo di g) e, in particolare, che esiste un'unica primitiva G di g a media nulla. Dimostrare che l'ipotesi che g è a media nulla non può essere eliminata (ossia che se g non è a media nulla non esiste una primitiva periodica di g).

(iii) Generalizzare il risultato del punto (i) dimostrando che: se $g \in C(\mathbb{R})$ è periodica e a media nulla e $0 < f \in C^1([a, +\infty))$ è monotona decrescente con $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ allora $fg \in \mathcal{R}^*([a, +\infty))$.

5.3 L'integrale di Gauss

Concludiamo questa sezione sull'integrabilità generalizzata osservando che, a volte, è possibile calcolare esplicitamente un integrale generalizzato di una funzione senza che tale funzione abbia una primitiva "esplicita" (o meglio, esprimibile in termini di funzioni elementari). È questo il caso di un importante integrale, detto integrale di Gauss:

Teorema 8.46 (Valore dell'integrale di Gauss)

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,. \tag{8.77}$$

[16] Ossia, se $T > 0$ è il periodo di g, allora $\displaystyle\int_0^T g = 0$.

Cominciamo con una definizione e alcuni lemmi.

Definizione 8.47 *Sia $E \subseteq \mathbb{R}$ e $f, f_n : A \to \mathbb{R}$. Si dice che $\{f_n\}$* **converge ad f uniformente su** *A (o $f_n \to f$ uniformememente) se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste N tale che $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ per ogni $n \geq N$ e per ogni $x \in A$.*

Lemma 8.48 *Sia E un intervallo limitato in $\mathbb{R}$ e $f_n, f \in \mathcal{R}(E)$. Se $f_n \to f$ uniformemente su E allora*

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)dx = \int_E f(x)dx \ .$$

Dimostrazione Sia $\varepsilon > 0$ e sia N tale che

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{|E|} \ , \qquad \forall\, x \in E \ , \qquad \forall\, n \geq N \ .$$

Allora, se $n \geq N$, si ha

$$\Big|\int_E f(x)dx - \int_E f_n(x)dx\Big| \leq \int_E |f(x) - f_n(x)|dx \leq \int_E \frac{\varepsilon}{|E|}dx = \varepsilon \ . \qquad \blacksquare$$

Lemma 8.49 *Se g è una funzione limitata su A e $f_n \to f$ uniformemente su A, allora $gf_n \to gf$ uniformemente su A.*

Dimostrazione Sia $\varepsilon > 0$ e sia $M = \sup_A |g|$. Poiché $f_n \to f$ uniformemente su A, per definizione di convergenza uniforme, esiste N tale che

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{M} \ , \qquad \forall\, n \geq N \ , \qquad \forall\, x \in A \ .$$

Si avrà allora, per $n \geq N$ e per $x \in A$

$$|g(x)f_n(x) - g(x)f(x)| = |g(x)|\ |f_n(x) - f(x)| \leq M|f_n(x) - f(x)| < M\ \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon. \qquad \blacksquare$$

Lemma 8.50 *Per ogni $y \in \mathbb{R}$ si definisca*

$$H(y) := \int_0^1 \frac{e^{y(1+t^2)}}{1+t^2}\ dt \ . \tag{8.78}$$

Allora H è derivabile e si ha

$$H'(y) := \int_0^1 e^{y(1+t^2)}\ dt \ . \tag{8.79}$$

Dimostrazione Siano $0 < |h_n| < 1$ tali che $\lim h_n = 0$ e si definisca

$$f_n(t) := \frac{e^{h_n(1+t^2)} - 1}{h_n} \ . \tag{8.80}$$

Per la formula di Taylor in $x = 0$ al secondo ordine (con resto di Lagrange) per[17] e^x, esiste $0 < s < 1$ tale che

$$e^{h_n(1+t^2)} - 1 = h_n(1+t^2) + \frac{e^{s\ h_n(1+t^2)}}{2}\ \Big(h_n(1+t^2)\Big)^2 \ .$$

[17] Cioè: $\forall\, x\ \exists\, 0 < s < 1$ tale che $e^x = 1 + x + \dfrac{e^{sx}}{2}\ x^2$.

Dunque, per ogni $t \in [0,1]$,

$$|f_n(t) - (1+t^2)| = \frac{e^{s\ h_n(1+t^2)}}{2} \left| h_n(1+t^2)^2 \right| \leq |h_n|\ 2e^2 \ ,$$

il che mostra che f_n converge uniformemente a $(1+t^2)$ su $[0,1]$. Dal Lemma 8.49 segue che $\frac{e^{y(1+t^2)}}{1+t^2} f_n(t)$ converge a $e^{y(1+t^2)}$ uniformemente su $[0,1]$. Quindi, per il Lemma 8.48 si ha che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{H(y+h_n) - H(y)}{h_n} = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{e^{y(1+t^2)}}{1+t^2} f_n(t)\ dt = \int_0^1 e^{y(1+t^2)}\ dt \ .$$

Dall'arbitrarietà della successione $\{h_n\}$ (e dal "Teorema ponte") segue la tesi. ∎

Dimostrazione (del Teorema 8.46) Si definisca

$$F(x) := \int_0^x e^{-\xi^2}\ d\xi \ , \qquad G(x) := \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\ dt \ . \tag{8.81}$$

Dunque $G(x) = H(-x^2)$ e, per il Lemma,

$$\begin{aligned} G'(x) &= -2xH'(-x^2) = -2x \int_0^1 e^{-x^2(1+t^2)}\ dt \\ &= -2e^{-x^2} \int_0^1 e^{-(xt)^2}\ d(xt) = -2e^{-x^2} \int_0^x e^{-\xi^2}\ d\xi \\ &= -2e^{-x^2} F(x) = -2F'(x)F(x) = -(F^2)'(x) \ . \end{aligned}$$

Tale relazione è equivalente a $(F^2+G)' = 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e quindi F^2+G è una funzione costante. Dunque

$$F^2(x) + G(x) = F(0)^2 + G(0) = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\ dt = \operatorname{Arctan} 1 - \operatorname{Arctan} 0 = \frac{\pi}{4} \ . \tag{8.82}$$

Si osservi che[18]

$$0 \leq G(x) \leq e^{-x^2} \ ,$$

dunque, prendendo il limite per $x \to \infty$ in (8.82) si ottiene

$$\left(\int_0^\infty e^{-x^2}\ dx \right)^2 = \frac{\pi}{4} \ ,$$

ovvero la tesi. ∎

[18] L'integrando, nella definizione di G è positivo e maggiorato da e^{-x^2}.