9.2 La Formula di Taylor

• Formula di Taylor al secondo ordine

Dal punto di vista geometrico, l'Osservazione 7.5 può essere parafrasata dicendo che, se f è derivabile in x_0, e se consideriamo il fascio di rette passanti per il punto $(x_0, y_0) := (x_0, f(x_0))$ del grafico di f, G_f, allora:

la retta che meglio approssima G_f in (x_0, y_0) è la retta tangente $r_{\rm tg}(x) := y_0 + f'(x_0)(x - x_0)$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - \big(y_0 + m(x - x_0)\big)}{x - x_0} = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad m = f'(x_0)\ . \tag{7.106}$$

Analogamente, ci si può chiedere: *qual è la parabola che meglio approssima G_f in (x_0, y_0)?* O, più precisamente, qual è (se esiste) il polinomio P_2 di grado al più due per cui valga la seguente formula?

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - P_2(x)}{(x - x_0)^2} = 0\ . \tag{7.107}$$

Osservazione 7.69 (i) In generale, se $\lim_{x\to x_0} g = 0$ (e $g \neq 0$ vicino a x_0) affinché si abbia $\lim_{x\to x_0} f/g = 0$ è *necessario* che[34] $\lim_{x\to 0} f = 0$.
(ii) Poiché stiamo studiando il comportamento vicino a x_0, è naturale usare la "variabile" $(x - x_0)$ e, in particolare, cercare P_2 della forma $P_2(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2$.
(iii) Dalle osservazioni precedenti segue che *condizione necessaria* affinché (7.107) valga con $P_2 = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2$ è che si abbia $a_0 = x_0$ e $a_1 = f'(x_0)$.
(iv) Sia $f(x) = x|x|$. Abbiamo visto in (7.95) che $f' = 2|x|$ e che, dunque, f non è derivabile due volte in $x_0 = 0$. Quindi (7.107) con $x_0 = 0$ in questo caso diventa

$$0 = \lim_{x\to 0} \frac{x|x| - a_2 x^2}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x} - a_2\ , \tag{7.108}$$

ma $\lim_{x\to 0\pm} \frac{|x|}{x} = \pm 1$ e quindi (7.108) non è vera per alcun valore di a_2.
Ne segue che è *necessario, in generale, assumere che f sia derivabile due volte in x_0 affinché* (7.107) *valga.*

In vista delle osservazioni (iii) e (iv), assumiamo, dunque, che f sia derivabile due volte in x_0, che $P_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2$ e osserviamo che

$$\frac{D\big(f(x) - P_2(x)\big)}{D(x - x_0)^2} = \frac{1}{2}\frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} - a_2\ ,$$

e dunque *se $a_2 := f''(x_0)/2$, dal Teorema di Bernoulli–Hôpital, segue che*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - \big(f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2\big)}{(x - x_0)^2} = 0\ . \tag{7.109}$$

Abbiamo dimostrato

Proposizione 7.70 (Formula di Taylor al secondo ordine) *Sia f derivabile due volte in x_0 allora*

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + R_2(x; x_0) \tag{7.110}$$

con R_2, definito da tale formula, che soddisfa $\lim_{x\to x_0} R_2/(x - x_0)^2 = 0$.

[34] Infatti $\lim_{x\to x_0} g = 0$ e $\lim_{x\to x_0} f/g = 0$ implicano che $\lim_{x\to x_0} f = \lim_{x\to x_0} g \cdot f/g = \lim_{x\to x_0} g \cdot \lim_{x\to x_0} f/g = 0$.

• **"Zeri" di ordine n**

È utile (e standard) in questa discussione introdurre le seguenti notazioni.

Definizione 7.71 *Siano $f, g : A\backslash\{x_0\} \to \mathbb{R}$ e $g \neq 0$. Allora:*

(i) $f = O(g)$ *vicino a* $x_0 \overset{\text{def}}{\iff} \exists\, M > 0$ *tale che* $|f| \le M|g|$ *vicino a* x_0*;*

(ii) $f = o(g)$ *vicino a* $x_0 \overset{\text{def}}{\iff} \lim_{x\to x_0} \frac{f}{g} = 0$*;*

(iii) $f \sim g$ *vicino a* $x_0 \overset{\text{def}}{\iff} \lim_{x\to x_0} \frac{f}{g} = 1$.

(iv) $f_1 = f_2 + o(g)$ *o* $f_1 = f_2 + O(g)$ *significa, rispettivamente,* $f = o(g)$ *e* $f = O(g)$ *con* $f := f_1 - f_2$.

(v) *Diciamo che una funzione f ha uno* **zero di ordine** $n \in \mathbb{N}$ **in** $x_0 \in \mathbb{R}$ *se* $f = O\big((x-x_0)^n\big)$*; f ha uno* **zero di ordine superiore a** n **in** $x_0 \in \mathbb{R}$ *se* $f = o\big((x-x_0)^n\big)$.

Osservazione 7.72 (i) Ad esempio, vicino a $+\infty$ si ha:

$$x \operatorname{sen} x = O(x)\ ,\ \ \operatorname{sen} x = O(1)\ ,\ \ \operatorname{sen} x = o(x)\ ,\ x = O(x^2)\ ,\ x = o(x^2)\ ,\ x + \operatorname{sen} x \sim x \tag{7.111}$$

mentre vicino a 0 si ha:

$$x \operatorname{sen} x = O(x^2)\ ,\ \ \operatorname{sen} x = o(1)\ ,\ e^x x = O(x)\ ,\ x^2 = o(x)\ ,\ \ \operatorname{sen} x \sim x\ ,\ 1 + x \sim 1\ . \tag{7.112}$$

(ii) $f = o(g) \implies f = O(g)$.

(iii) Se f ha uno zero di ordine superiore ad n, allora ha uno zero di ordine n ma non è detto che abbia uno zero di ordine $n+1$: ad esempio $|x|^{3/2} = o(x)$, ma non è vero che $|x|^{3/2} = O(x^2)$.

Per le funzioni derivabili n volte l'avere uno zero in x_0 di ordine superiore a n si caratterizza semplicemente in termini delle derivate:

Proposizione 7.73 *Sia F una funzione derivabile $n \in \mathbb{N}$ volte in x_0. Allora F ha uno zero di ordine superiore a n in x_0 se e solo se tutte le derivate di ordine*[35] $0 \le k \le n$ *sono nulle in x_0. In formule:*

$$F(x) = o\big((x-x_0)^n\big) \qquad \iff \qquad F^{(k)}(x_0) = 0\ ,\ \ \forall\ 0 \le k \le n\ . \tag{7.113}$$

La dimostrazione è basata sul seguente corollario del teorema del valor medio di Cauchy:

Lemma 7.74 *Sia $n \in \mathbb{N}$ e siano $f, g : I \to \mathbb{R}$ derivabili n volte in I e sia $x_0 \in I$. Assumiamo che $g^{(k)} \neq 0$ in $I\backslash\{x_0\}$ per ogni $k \le n$ e che $f^{(k)}(x_0) = g^{(k)}(x_0) = 0$ per $0 \le k \le n-1$. Allora per ogni $x \in I\backslash\{x_0\}$ esiste un punto ξ tra x e x_0 tale che*

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{(n)}(\xi)}{g^{(n)}(\xi)}\ . \tag{7.114}$$

Dimostrazione Applicando iterativamente il teorema del valor medio di Cauchy troviamo che esistono n punti ξ_1,...,ξ_n tra x e x_0 tali che

$$\begin{aligned}
\frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(\xi_1)}{g'(\xi_1)} = \frac{f'(\xi_1) - f'(x_0)}{g'(\xi_1) - g'(x_0)} = \cdots \\
&= \frac{f^{(n-1)}(\xi_{n-1})}{g^{(n-1)}(\xi_{n-1})} = \frac{f^{(n-1)}(\xi_1) - f^{(n-1)}(x_0)}{g^{(n-1)}(\xi_1) - g^{(n-1)}(x_0)} \\
&= \frac{f^{(n)}(\xi_n)}{g^{(n)}(\xi_n)}\ .
\end{aligned}$$

[35] Si ricorda che "la derivata di ordine 0" $f^{(0)}$ non è altro che la funzione f stessa.

La tesi segue con $\xi = \xi_n$. ∎

Dimostrazione della Proposizione 7.73 Per induzione su $n \in \mathbb{N}$. Per $n = 1$ la (7.113) segue dalla definizione di derivata (come già osservato).
Assumiamo che (7.113) valga e dimostriamola per $n + 1$.
Se $F(x) = o((x - x_0)^{n+1})$, (essendo anche $F(x) = o((x - x_0)^n)$) dall'ipotesi induttiva segue che $F^{(k)}(x_0) = 0$ per ogni $k \le n$. Dal Lemma 7.74 (applicato a $f = F$, $g = (x - x_0)^{n+1}$) segue che, per ogni $x \ne x_0$ esiste uno ξ tra x e x_0 tale che

$$\frac{F(x)}{(x - x_0)^{n+1}} = \frac{F^{(n)}(\xi)}{(n+1)!(\xi - x_0)} = \frac{1}{(n+1)!} \frac{F^{(n)}(\xi) - F^{(n)}(x_0)}{\xi - x_0} . \tag{7.115}$$

Quindi, se $\{x_j\}$ è una qualunque successione tale che $x_0 \ne x_j \to x_0$, segue che esiste una successione $\{\xi_j\}$ con ξ_j tra x_0 e x_j (e quindi $x_0 \ne \xi_j \to x_0$) tale che

$$0 = \lim_{j \to +\infty} \frac{F(x_j)}{(x_j - x_0)^{n+1}} = \frac{1}{(n+1)!} \frac{F^{(n)}(\xi_j) - F^{(n)}(x_0)}{\xi_j - x_0} = \frac{F^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!} ,$$

il che implica che $F^{(k)}(x_0) = 0$ per ogni $k \le n + 1$.
Assumiamo ora che $F^{(k)}(x_0) = 0$ per ogni $k \le n + 1$. Segue che $F \in C^n$ e che $F^{(k)} \to 0$ per ogni $k \le n$. Dunque applicando iterativamente n volte il Teorema di Bernoulli–Hôpital si ha che

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to x_0} \frac{F(x)}{(x - x_0)^{n+1}} &= \lim_{x \to x_0} \frac{F'(x)}{(n+1)(x - x_0)^n} = \cdots = \frac{1}{(n+1)!} \lim_{x \to x_0} \frac{F^{(n)}(x)}{x - x_0} \\
&= \frac{1}{(n+1)!} \lim_{x \to x_0} \frac{F^{(n)}(x) - F^{(n)}(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{(n+1)!} F^{(n+1)}(x_0) = 0 .
\end{aligned}$$ ∎

- **Teorema di Taylor–Peano**

Definizione 7.75 *Sia f derivabile n volte in x_0. Si chiamano, rispettivamente,* **polinomio di Taylor di ordine n di f in x_0** *e* **resto di Taylor di ordine n in x_0** *le funzioni*

$$T_n(x; x_0) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k , \tag{7.116}$$

$$R_n(x; x_0) := f(x) - T_{n,f}(x; x_0) . \tag{7.117}$$

Si noti che $\deg(T_n) \le n$.

Teorema 7.76 (Teorema di Taylor–Peano) (i) *Sia f una funzione derivabile n volte in x_0 e sia P_n un polinomio di grado al più n. Allora,*

$$f = P_n + o\big((x - x_0)^n\big) \qquad \Longleftrightarrow \qquad P_n(x) = T_n(x; x_0) . \tag{7.118}$$

(ii) *Se f è derivabile $(n + 1)$ volte vicino a x_0 allora, per ogni x vicino a x_0 esiste ξ tra x e x_0 tale che*

$$f(x) - T_n(x; x_0) =: R_n(x; x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} , \tag{7.119}$$

esplicitamente:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} . \tag{7.120}$$

(iii) *Se $f \in C^{n+1}(I)$ con I intervallo contenente x_0 allora*

$$f(x) = T_n(x; x_0) + O\big((x - x_0)^{n+1}\big) \ , \quad (\forall\ x \in I) \ , \tag{7.121}$$

e infatti si ha:

$$|f - T_n| = |R_n| \le M\ |x - x_0|^{n+1} \ , \quad \text{con} \quad M = \frac{\sup_I |f^{(n+1)}|}{(n+1)!} \ . \tag{7.122}$$

Dimostrazione (i) Se poniamo (come è sempre possibile)

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^n$$

si ha, come è immediato verificare, che

$$P_n^{(k)}(x_0) = \begin{cases} k!a_k & \text{se } k \le n \\ 0 & \text{se } k > n \ . \end{cases} \tag{7.123}$$

Dunque, se $F(x) := f(x) - P_n(x)$ si ha, per ogni $k \le n$, $F^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0) - k!a_k$, e $F^{(k)}(x_0) = 0$ se e solo se $a_k = f^{(k)}(x_0)/k!$ ossia se e solo se $P_n(x) = T_n(x; x_0)$. Dunque, (i) segue dalla Proposizione 7.73.

(ii) segue dal Lemma 7.74 con $f(x) - T_n(x; x_0)$ al posto di f, $(x - x_0)^{n+1}$ al posto di g e $n+1$ al posto di n.

(iii) segue imediatamente da (ii). ∎

Definizione 7.77 *La formula (7.120) si chiama la formula di Taylor di ordine n (per f in x_0) con* **resto in forma di Lagrange**. *Se $x_0 = 0$ la (7.120) viene anche chiamata* **formula di Maclaurin**.

Osservazione 7.78 (i) Dal teorema di Taylor–Peano segue che se f è derivabile n volte in x_0 allora

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\ (x - x_0)^k + o\big((x - x_0)^n\big) \ , \tag{7.124}$$

mentre se[36] $f \in C^{n+1}$ in un intorno di x_0,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\ (x - x_0)^k + O\big((x - x_0)^{n+1}\big) \ , \tag{7.125}$$

Anche tali formule vengono chiamate formule di Taylor.

Esempio 7.79 (i) da (7.121) (e la regolarità delle funzioni considerate in $x_0 = 0$) seguono immediatamente le seguenti formule di Taylor–Maclaurin[37]:

[36] Si noti che, in generale, sotto le sole ipotesi in (ii), $f^{(n+1)}$ potrebbe essere non limitata per $x \to x_0$.
[37] Nella (7.129), $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + O(x^{n+1}), \tag{7.126}$$

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + O(x^{n+1}), \tag{7.127}$$

$$\log(1+x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1}\frac{x^k}{k} + O(x^{n+1}), \tag{7.128}$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}\, x^n + O(x^{n+1}), \tag{7.129}$$

$$\operatorname{senh} x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + O(x^{2n+3}), \tag{7.130}$$

$$\cosh x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + O(x^{2n+2}), \tag{7.131}$$

$$\operatorname{sen} x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + O(x^{2n+3}), \tag{7.132}$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + O(x^{2n+2}). \tag{7.133}$$

(ii) Se φ è la funzione dell'Esercizio 7.24, si ha che $\varphi^{(k)}(0) = 0$ per ogni k e dunque $T_n \equiv 0$ per ogni n e quindi la formula di Taylor in $x_0 = 0$ per tale funzione diventa $\varphi(x) = O(x^n)$ per ogni n. Si noti, però, che $\varphi(x) > 0$ per $x > 0$.

La formula di Taylor dà indicazioni molto precise sul comportamento di una funzione regolare vicino a x_0; in particolare, può essere utile nel determinare il carattere di un punto critico. Vale infatti la seguente semplice generalizzazione della Proposizione 7.40–(ii):

Proposizione 7.80 *Sia f una funzione derivabile $n \geq 2$ volte in x_0 e tale che $f^{(k)}(x_0) = 0$ per $1 \leq k \leq n-1$ e $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Allora: se n è pari e $f^{(n)}(x_0) > 0$, x_0 è un punto di minimo relativo stretto; se n è pari e $f^{(n)}(x_0) < 0$, x_0 un punto di è un massimo relativo stretto; se n è dispari, $f(x) - f(x_0)$ cambia segno vicino a x_0.*

Dimostrazione Dalle ipotesi e dal Teorema di Taylor–Peano segue che

$$f(x) - f(x_0) = a(x-x_0)^n + o\big((x-x_0)^n\big) = a(x-x_0)^n\big(1+o(1)\big)\ , \quad a := \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \neq 0\ .$$

Da tale formula (e dal teorema della permanenza del segno per limiti applicato alla funzione $1+o(1)$) segue la tesi. ∎

Esempio 7.81 Consideriamo la funzione $f(x) = \sqrt{1+x^2 - \operatorname{sen}^2 x}$ vicino a $x_0 = 0$. Poiché[38]

$$\operatorname{sen}^2 x = (x - \frac{x^3}{6} + O(x^5))^2 = x^2 - \frac{x^4}{3} + O(x^6)$$

si ha che $x^2 - \operatorname{sen}^2 x = \frac{x^4}{3} + O(x^6)$. Da (7.129) segue che $\sqrt{1+y} = 1 + \frac{1}{2}y + O(y^2)$ vicino a 0 e dunque

$$f(x) = 1 + \frac{1}{2}\Big(\frac{x^4}{3} + O(x^6)\Big) + O\Big(\Big(\frac{x^4}{3} + O(x^6)\Big)^2\Big) = 1 + \frac{x^4}{6} + O(x^6)\ .$$

[38] Si osservi che $x^n O(x^m) = O(x^{n+m})$ per ogni $n, m \in \mathbb{N}_0$.

Dunque, dalla Proposizione 7.80 segue che 0 è un punto di minimo relativo stretto per f.

Se f è una funzione C^∞ sono ben definiti tutti i polinomi di Taylor ed è naturale porre la seguente

Definizione 7.82 *Se f è C^∞ in un intorno I di x_0,*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\,(x-x_0)^n \tag{7.134}$$

prende il nome di **serie di Taylor di f in x_0** *(o* **serie di Maclaurin** *se $x_0 = 0$).*

È poi anche naturale chiedersi che relazione ci sia tra f e la sua serie di Taylor. La risposta ingenua che esse coincidano è, in generale, falsa come mostra l'esempio della funzione φ dell'Esercizio 7.24: infatti la sua serie di Maclaurin è la serie identicamente nulla (essendo $\varphi^{(k)}(0) = 0$ per ogni $k \geq 0$); ma d'altra parte $\varphi(x) > 0$ se $x > 0$ e quindi φ non coincide con la sua serie di Maclaurin in alcun intorno di 0.
Che l'esponenziale e^x coincida con la sua serie di Maclaurin è il contenuto del Teorema 5.3–Cap 5, mentre la (5.6)–Cap 5 mostra che anche $\operatorname{senh} x$ e $\cosh x$ coincidono con le loro serie di Maclaurin. Nel caso di seno e coseno, esse *sono state definite* attraverso la loro serie di Maclaurin.
In effetti, si può dimostrare che *tutte le funzioni elementari elencate nella Tavola di derivate di § 2 coincidono con le loro serie di Maclaurin.*
In generale, le funzioni C^∞ che coincidono con le loro serie di Taylor si chiamano "reali–analitiche" e costituiscono una classe funzionale di fondamentale importanza, soprattutto in relazione alla *analisi complessa*.

Esercizio 7.26 Si dimostrino direttamente (ossia, senza usare il Teorema di Taylor–Peano) le (7.126), (7.127), (7.130), (7.131), (7.132) e (7.133).

Suggerimento: Per le funzioni esponenziali e trigonometriche si usi la disuguaglianza $\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{|x|^k}{k!} \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\, e^{|x|}$.

Esercizio 7.27 Usando la (7.122), si dimostri che $\log(1+x)$ e $(1+x)^\alpha$ coincidono con le loro serie di Maclaurin in $|x| < 1$.