Capitolo 8

Teoria dell'integrazione di Riemann

In questo capitolo discutiamo la classica (e la più "elementare") teoria dell'integrazione di funzioni reali, dovuta, essenzialmente, a B. Riemann, teoria che nasce dalla antica necessità di formalizzare ed estendere il calcolo di "aree piane". Sebbene la classe di funzioni che risulteranno essere integrabili secondo Riemann è piuttosto ristretta (e fondamentalmente legata alla continuità), la teoria dell'integrazione di Riemann è un capitolo imprescindibile dei fondamenti dell'analisi matematica e comunque sufficiente per capire – ed apprezzare! – l'intima connessione tra i due strumenti fondamentali del calcolo differenziale: le derivate e gli integrali.

1 L'integrale di Riemann

1.1 Definizioni

Definizione 8.1 (i) *Sia E un intervallo limitato di $\mathbb{R}$. Una* **partizione** *di E è un insieme finito di intervalli* $\mathrm{P} := \{I_j : 1 \leq j \leq n\}$ *a due a due disgiunti tali che* $\bigcup_{i=1}^{n} I_i = E$*; se* $\sup I_i = \inf I_{i+1}$ *per ogni* $1 \leq i < n$ *diremo che la partizione* P *è una* **partizione ordinata**. *La famiglia di tutte le partizioni di E si denota con $\mathcal{P}(E)$.*
Il numero positivo[1] $\delta := \max\{|I_j| \,\big|\, 1 \leq j \leq n\}$ *si chiama* **diametro** *della partizione* P *e si denota* $\mathrm{diam}\,(\mathrm{P})$.
(ii) *Se* $\mathrm{P}, \mathrm{P}' \in \mathcal{P}(E)$ *diremo che* P' *è un* **raffinamento** *di* P *o che* P' *è più fine di* P (*o che* P *è meno fine di* P'), *e scriveremo* $\mathrm{P} \prec \mathrm{P}'$, *se ogni intervallo di* P *ammette una partizione formata di intervalli di* P'*;* $\mathrm{P}' \succ \mathrm{P}$ *significa* $\mathrm{P} \prec \mathrm{P}'$.
(iii) *Se* $\mathrm{P}, \mathrm{P}' \in \mathcal{P}(E)$, **il raffinamento di** P **e** P' *è l'insieme di intervalli*

$$P \wedge P' := \{I \cap I' \,\big|\, I \in \mathrm{P}, I' \in \mathrm{P}' \ \ \text{con } I \cap J \neq \emptyset\} \ . \tag{8.1}$$

(iv) *Sia E un intervallo limitato, $f : E \to \mathbb{R}$ una funzione limitata e* $\mathrm{P} = \{I_j : 1 \leq j \leq n\}$ *una partizione di E. Chiamiamo, rispettivamente,* **somma inferiore di Riemann** *e* **somma**

[1] Si ricorda che, per un intervallo I, $|I| = \ell(I) = \mathrm{mis}(I)$ denota la sua lunghezza o misura, data da $(\sup I) - (\inf I)$.

superiore di Riemann (*di* f *su* E *rispetto alla partizione* P) *i numeri reali*

$$\underline{S}_E(f,\mathrm{P}) := \sum_{i=1}^{n}(\inf_{I_i} f)|I_i| \le \overline{S}_E(f,\mathrm{P}) := \sum_{i=1}^{n}(\sup_{I_i} f)|I_i| \ . \tag{8.2}$$

Osservazione 8.2 (i) Chiaramente, è sempre possibile, rinumerando gli intervalli di una partizione, ottenere una partizione ordinata.
(ii) Se $\mathrm{P} := \{I_j : 1 \le j \le n\}$ è una partizione dell'intervallo limitato I si ha che

$$\sum_{j=1}^{n} |I_j| = |I| \ , \tag{8.3}$$

infatti, assumendo che P sia ordinata e ponendo $a_j = \inf I_j$ e $b_j = \sup I_j$ si ha: $a_1 = \inf I$, $b_n = \sup I$, $b_j = a_{j+1}$ e

$$\sum_{j=1}^{n} |I_j| = \sum_{j=1}^{n}(b_j - a_j) = \sum_{j=1}^{n-1}(a_{j+1} - a_j) + (b_n - a_n) = b_n - a_1 = |I|.$$

(ii) La relazione "$\prec$" è una relazione d'ordine parziale su $\mathcal{P}(E)$.
Non si confonda l'ordine totale "$\le$" tra gli intervalli di una data partizione con l'ordine parziale "$\prec$" tra le partizioni di $\mathcal{P}(E)$.
Chiaramente, se $\mathrm{P} \prec \mathrm{P}'$, $\#\mathrm{P} \le \#\mathrm{P}'$.
(iv) Se $\mathrm{P} = \{I_j \big| j \le n\} \prec \mathrm{P}'$, per ogni j esistono intervalli $I_{ji} \in \mathrm{P}'$ con $i \le n_j$ (n_j opportuno) tali che $I_j = \bigcup_{i=1}^{n_j} I_{ji}$ e $\mathrm{P}' = \{I_{ji} \big| j \le n, i \le n_j\}$.
(v) Sia $\mathrm{P} = \{I_j \big| 1 \le j \le n\}$ e $\mathrm{P}' = \{I'_i \big| 1 \le i \le m\}$. Poiché l'intersezione di intervalli o è vuota o è un intervallo, ed essendo

$$\bigcup_{\substack{1\le j\le n\\ 1\le i\le m}} I_j \cap I'_i = \bigcup_{j=1}^{n}\bigcup_{i=1}^{m} I_j \cap I'_i = \bigcup_{j=1}^{n} I_j = E \ ,$$

si ha che $\mathrm{P} \wedge \mathrm{P}' \in \mathcal{P}(E)$.
Quindi dalla definizione segue che $\mathrm{P} \prec \mathrm{P} \wedge \mathrm{P}'$, $\mathrm{P}' \prec \mathrm{P} \wedge \mathrm{P}'$: infatti, è facile verificare che $\mathrm{P} \wedge \mathrm{P}'$ *è la partizione meno fine che raffina simultaneamente* P *e* P': se $\mathrm{P} \prec \mathrm{P}''$ e $\mathrm{P}' \prec \mathrm{P}''$ allora $\mathrm{P} \wedge \mathrm{P}' \prec \mathrm{P}''$.

Esercizio 8.1 Siano $\mathrm{P}, \mathrm{P}' \in \mathcal{P}(E)$. Dimostrare che $\mathrm{P} \wedge \mathrm{P}'$ è la partizione meno fine di E che raffina simultaneamente P e P'.

Lemma 8.3 *Sia* E *un intervallo limitato di* $\mathbb{R}$, $f : E \to \mathbb{R}$ *una funzione limitata e* $\mathrm{P}, \mathrm{P}' \in \mathcal{P}(E)$. *Si ha che:*
(i) *se* $\mathrm{P} \prec \mathrm{P}'$, *allora*

$$\begin{cases} \underline{S}_E(f,\mathrm{P}) \le \underline{S}_E(f,\mathrm{P}') \le \overline{S}_E(f,\mathrm{P}') \le \overline{S}_E(f,\mathrm{P}) \ , & (\mathrm{P} \prec \mathrm{P}') \\ \overline{S}_E(f,\mathrm{P}') - \underline{S}_E(f,\mathrm{P}') \le \overline{S}_E(f,\mathrm{P}) - \underline{S}_E(f,\mathrm{P}) \ , & (\mathrm{P} \prec \mathrm{P}') \ . \end{cases} \tag{8.4}$$

(ii) $\underline{S}_E(f,\mathrm{P}) \le \overline{S}_E(f,\mathrm{P}')$.

Si noti che in (ii) non abbiamo assunto alcuna relazione tra P e P′.

Dimostrazione (i): Siano P e P′ come in (iv)–Osservazione 8.2. Allora, poiché $\inf_{I_j} f \leq \inf_{I_{ji}} f$ e $\sup_{I_j} f \geq \sup_{I_{ji}} f$, si ha che

$$\begin{aligned}
\underline{S}_E(f,\mathrm{P}) &= \sum_{j=1}^{n} (\inf_{I_j} f)|I_j| \overset{(8.3)}{=} \sum_{j=1}^{n} (\inf_{I_j} f) \sum_{i=1}^{n_j} |I_{ji}| \leq \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n_j} (\inf_{I_{ji}} f)|I_{ji}| = \underline{S}_E(f,\mathrm{P}') \\
\overline{S}_E(f,\mathrm{P}) &= \sum_{j=1}^{n} (\sup_{I_j} f)|I_j| \overset{(8.3)}{=} \sum_{j=1}^{n} (\sup_{I_j} f) \sum_{i=1}^{n_j} |I_{ji}| \geq \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n_j} (\sup_{I_{ji}} f)|I_{ji}| = \overline{S}_E(f,\mathrm{P}') \ ,
\end{aligned}$$

il che dimostra la prima riga di (8.4); la seconda riga è conseguenza immediata della prima. Dal punto precedente e da (v)–Osservazione 8.2 segue che

$$\underline{S}_E(f,\mathrm{P}) \leq \underline{S}_E(f,\mathrm{P}\wedge\mathrm{P}') \leq \overline{S}_E(f,\mathrm{P}\wedge\mathrm{P}') \leq \overline{S}_E(f,\mathrm{P}') \ , \quad \forall\ \mathrm{P},\mathrm{P}' \in \mathcal{P}(E) \ . \tag{8.5}$$

Il lemma è dimostrato. ∎

Dunque per ogni $\mathrm{P} \in \mathcal{P}(E)$, $\overline{S}_E(f,\mathrm{P})$ è un maggiorante dell'insieme di numeri $\{\underline{S}_E(f,\mathrm{P})\big| \mathrm{P} \in \mathcal{P}(E)\}$, mentre $\underline{S}_E(f,\mathrm{P})$ è un minorante dell'insieme di numeri $\{\overline{S}_E(f,\mathrm{P})\big| \mathrm{P} \in \mathcal{P}(E)\}$. Alla luce di tale osservazione poniamo:

Definizione 8.4 *Sia E un intervallo limitato e $f : E \to \mathbb{R}$ una funzione limitata. Il numero reale $\mathcal{J}_E^-(f) := \sup\{\underline{S}_E(f,\mathrm{P})\big| \mathrm{P} \in \mathcal{P}(E)\}$ si chiama* **integrale di Riemann inferiore di f su E***; il numero reale $\mathcal{J}_E^+(f) := \inf\{\overline{S}_E(f,\mathrm{P})\big| \mathrm{P} \in \mathcal{P}(E)\}$ si chiama* **integrale di Riemann superiore di f su E** *e ((ii)–Lemma 8.3):*

$$\mathcal{J}_E^-(f) \leq \mathcal{J}_E^+(f) \ . \tag{8.6}$$

Se in (8.6) vale l'uguaglianza diremo che f **è integrabile secondo Riemann su E** *(ed in tal caso chiameremo tale valore comune* **l'integrale di Riemann di f su E***.*
L'insieme delle funzioni f integrabili secondo Riemann sull'intervallo E si denota con $\mathcal{R}(E)$ e l'integrale di una funzione $f \in \mathcal{R}(E)$ con uno dei seguenti simboli

$$\mathcal{J}_E(f) \ , \qquad \int_E f \ , \qquad \int_E f(x)dx \ . \tag{8.7}$$

In questo capitolo considereremo solo la teoria dell'integrazione di Riemann e quindi d'ora in avanti *useremo il temine "integrabile" come sinonimo di "integrabile secondo Riemann"*.

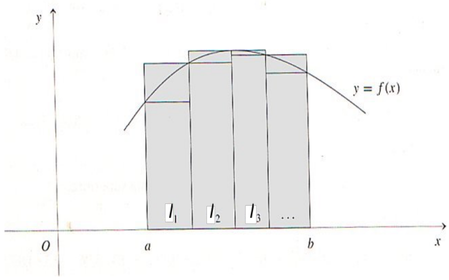

Figura 8.1: Partizione e somma superiore/inferiore di Riemann

Esempio 8.5 (i) Siano $a < b$ e $h > 0$ e sia $f : x \in E := [a, b] \mapsto h$ la funzione costante di valore h su $[a, b]$. Se prendiamo la partizione banale $\mathrm{P} = \{[a, b]\}$ si ha $\underline{S}_E(f, \mathrm{P}) = h(b - a) = \overline{S}_E(f, \mathrm{P})$ e quindi f è integrabile e il suo integrale $\int_E f = (b - a)h$ che non è altro che l'area del rettangolo $R := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \big| \, a \le x \le b \ , \ 0 \le y \le h\}$.
(ii) Sia $E = [0, 1]$ e sia $f : E \to \mathbb{R}$ tale che, $f(x) = 1$ se $x \in \mathbb{Q} \cap E$ e $f(x) = 0$ altrimenti. Chiaramente, per ogni intervallo $I \subseteq E$ che non sia degenere (ossia che non sia costituito da un solo punto) si ha che $\sup_I f = 1$ e $\inf_I f = 0$ (essendoci in ogni intervallo non degenere di $\mathbb{R}$ sia numeri razionali che numeri irrazionali). Dunque, per ogni partizione $\mathrm{P} \in \mathcal{P}(E)$ si ha che $\underline{S}_E(f, \mathrm{P}) = 0 < 1 = \overline{S}_E(f, \mathrm{P})$ e dunque f non è integrabile su E essendo $\mathcal{J}_E^-(f) = 0 < \mathcal{J}_E^+(f) = 1$.

Osservazione 8.6 L'Esempio 8.5–(i) ha un'importante generalizzazione, per formulare la quale abbiamo bisogno di alcune definizioni:

Definizione 8.7 (a) *Se* $\emptyset \ne A \subseteq \mathbb{R}$, *si chiama* **funzione caratteristica di** A (*o* **funzione indicatrice di** A) *la funzione*

$$\chi_A(x) := \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \\ 0 & \text{se } x \in A^c \ . \end{cases} \tag{8.8}$$

(b) *Una funzione* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *si dice* **semplice** *o* **costante a tratti** *se*

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \chi_{I_j}(x) \tag{8.9}$$

con $\alpha_j \in \mathbb{R}$ *e* I_j *intervalli limitati a due a due disgiunti. La classe delle funzioni semplici si denota con* $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.
$\mathcal{S}(E)$, *con* E *intervallo, denota la classe delle funzioni semplici* (8.9) *con* $\cup I_j \subseteq E$.

In particolare, se $f \in \mathcal{S}(E)$, allora $f(x) = 0$ per ogni $x \notin E$.
Le funzioni semplici sono integrabili: infatti se $f \in \mathcal{S}(E)$ è come in (8.9), possiamo prendere una partizione $\mathrm{P} \in \mathcal{P}(E)$ che contenga tutti gli intervalli $\{I_j\}$ e per tale partizione si ha (essendo ovviamente $\sup_{I_j} f = \inf_{I_j} f = \alpha_j$) $\underline{S}_E(f, \mathrm{P}) = \overline{S}_E(f, \mathrm{P})$ e dunque per il 1° criterio di integrabilità $f \in \mathcal{R}(E)$ ed inoltre dalla definizione di integrale di Riemann segue che

$$\int_E f = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j |I_j| \ . \tag{8.10}$$

Dunque *l'integrale di una funzione semplice si può interpretare come la somma algebrica ("con segno") delle aree dei rettangoli di base* $|I_j|$ *e altezza* $|\alpha_j|$.

1.2 Caratterizzazioni dell'integrabilità

(i) Sia E un intervallo limitato. Dalla definizione di estremo superiore/inferiore e dalla definizione di integrale di Riemann segue immediatamente che:

$f \in \mathcal{R}(E)$ *se e solo se*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \mathrm{P}, \mathrm{P}' \in \mathcal{P}(E) \big| \quad \overline{S}_E(f, \mathrm{P}) - \underline{S}_E(f, \mathrm{P}') < \varepsilon \ . \tag{8.11}$$

Inoltre, in vista di (8.5), possiamo prendere *la stessa* partizione in (8.11) (e cioè $\mathrm{P} \wedge \mathrm{P}'$) e dunque si ha il seguente

1° **Criterio di integrabilità:** *$f \in \mathcal{R}(E)$ se e solo se*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists\ \mathrm{P} \in \mathcal{P}(E) \big| \quad \overline{S}_E(f, \mathrm{P}) - \underline{S}_E(f, \mathrm{P}) < \varepsilon\ . \tag{8.12}$$

(ii) Il numero $\overline{S}_E(f, \mathrm{P}) - \underline{S}_E(f, \mathrm{P})$ si può scrivere in maniera più esplicita: se $\mathrm{P} = \{I_j \big| j \le n\}$, allora

$$\overline{S}_E(f, \mathrm{P}) - \underline{S}_E(f, \mathrm{P}) = \sum_{j=1}^{n} \big(\sup_{I_j} f - \inf_{I_j} f \big) |I_j|\ . \tag{8.13}$$

Definizione 8.8 *Sia f una funzione limitata su un insieme limitato A. Il numero $\sup_A f - \inf_A f$ si chiama* **oscillazione di f su** *A e si denota con $\mathrm{osc}\,(f, A)$.*

Segue facilmente (sempre dalla definizione di sup/inf) che[2]

$$\mathrm{osc}\,(f, A) := \sup_A f - \inf_A f = \sup_{x,y \in A} \big(f(x) - f(y) \big) = \sup_{x,y \in A} |f(x) - f(y)|\ . \tag{8.14}$$

Quindi il 1° Criterio di integrabilità si può riformulare come segue:

2° **Criterio di integrabilità:** *$f \in \mathcal{R}(E)$ se e solo se*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists\ \mathrm{P} = \{I_j \big| j \le n\} \in \mathcal{P}(E) \big| \quad \sum_{j=1}^{n} \mathrm{osc}\,(f, I_j) |I_j| < \varepsilon\ . \tag{8.15}$$

Esercizio 8.2 (i) Dimostrare le uguaglianze in (8.14).
(ii) Dimostrare che $\mathrm{osc}\,(f, A) = \mathrm{osc}\,(-f, A)$
(iii) Dimostrare che $\mathrm{osc}\,(f + g, A) \le \mathrm{osc}\,(f, A) + \mathrm{osc}\,(g, A)$.

Suggerimento: (i): da $\inf_A f - \sup_A f \le f(x) - f(y) \le \sup_A f - \inf_A f$, $\forall x, y \in A$ segue che $\sup_{x,y \in A} \big(f(x) - f(y) \big) \le \sup_A f - \inf_A f$ (e per simmetria $\sup_{x,y \in A} |f(x) - f(y)| \le \sup_A f - \inf_A f$). Da $f(x') - f(y') \le |f(x') - f(y')| \le \sup_{x,y \in A} |f(x) - f(y)|$, prendendo il sup su $x', y' \in A$ segue che $\sup_A f - \inf_A f \le \sup_{x,y \in A} |f(x) - f(y)|$.

Osservazione 8.9 Dalla definizione di integrale segue che, se $f \in \mathcal{R}(E)$ e ε e $\mathrm{P} = \{I_j\}$ sono come in (8.12), allora per ogni $\xi_i \in I_i$ si ha che[3]

$$\Big| \int_E f - \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j) |I_j| \Big| < \varepsilon\ . \tag{8.16}$$

Definizione 8.10 *La somma in (8.16) si chiama* **somma di Riemann rispetto alla partizione** $\mathrm{P} = \{I_j\}$ **e la scelta di punti** $\{\xi_j\}$.

[2]Vedi Es. 8.2.
[3]Infatti, i due numeri $\int_E f$ e $\sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)|I_j|$ appartengono entrambi all'intervallo $\big[\underline{S}_E(f, \mathrm{P}), \overline{S}_E(f, \mathrm{P})\big]$.

1.3 Proprietà fondamentali delle funzioni integrabili

Proposizione 8.11 *Sia E un intervallo limitato, $f, g \in \mathcal{R}(E)$ e $a, b \in \mathbb{R}$. Allora:*

(i) $af + bg \in \mathcal{R}(E)$ *e* $\displaystyle\int_E (af+bg) = a\int_E f \ + \ b\int_E g$*;*

(ii) $f_\pm$, $|f|$, $\max\{f,g\}$, $\min\{f,g\}$ *e* fg *sono integrabili;*

(iii) *Se* $f \le g$ *allora* $\displaystyle\int_E f \le \int_E g$*;*

(iv) $\displaystyle\Big|\int_E f\Big| \le \int_E |f|$*;*

(v) *per ogni intervallo $I \subseteq E$, f è integrabile su I. Inoltre se $\{I_j\} \in \mathcal{P}(E)$ si ha*

$$\int_E f = \sum_{j=1}^n \int_{I_j} f \ . \tag{8.17}$$

Dimostrazione (i) Dimostriamo prima che $af \in \mathcal{R}(E)$ per ogni $a \in \mathbb{R}$ e poi che $f+g \in \mathcal{R}(E)$ (per ogni $f, g \in \mathcal{R}(E)$): da queste due proprietà segue che $af + bg \in \mathcal{R}(E)$.
Per $a = 0$ la tesi è banalmente vera. Se $a > 0$, $\operatorname{osc}(af, I) = a \operatorname{osc}(f, I)$ e dunque se $\varepsilon > 0$ e f soddisfa (8.15) con ε/a al posto di ε si ha che af soddisfa il 2º criterio di integrabilità.
Poiché $\operatorname{osc}(-f, I) = \operatorname{osc}(f, I)$ dall'integrabilità di f segue immediatamente l'integrabilità di $-f$. Dunque se $f \in \mathcal{R}(E)$, si ha che $af \in \mathcal{R}(E)$.
L'integrabilità di $f + g$ segue immediatamente dal 2º criterio di integrabilità e dal fatto che $\operatorname{osc}(f+g, I) \le \operatorname{osc}(f, I) + \operatorname{osc}(g, I)$.
L'uguaglianza tra gli integrali in (i) segue facilmente dall'Osservazione 8.9 poiché se $\{\xi_j\}$ è una scelta di punti relativi ad una partizione $\mathrm{P} = \{I_j\} \in \mathcal{P}(E)$ (ossia $\xi_j \in I_j$), si ha ovviamente:

$$\sum_{j=1}^n \big(af(\xi_j) + bg(\xi_j)\big)|I_j| = a\sum_{j=1}^n f(\xi_j)|I_j| + b\sum_{j=1}^n g(\xi_j)|I_j| \ .$$

(ii) Dimostriamo l'integrabilità di f_+. Dato $\varepsilon > 0$, sia P come in (8.15). La famiglia di intervalli P è unione disgiunta delle seguenti tre famiglie di intervalli (che possono anche essere vuote):

$$\mathrm{P}_+ := \{I \in \mathrm{P} \big| \inf_I f \ge 0\}, \ \mathrm{P}_- := \{I \in \mathrm{P} \big| \sup_I f \le 0\}, \ \mathrm{P}_0 := \{I \in \mathrm{P} \big| \sup_I f > 0 > \inf_I f\}.$$

Sugli intervalli di P_+, $f = f_+$; sugli intervalli di P_-, $f_+ = 0$ e sugli intervalli di P_0 si ha che $\sup_I f = \sup_I f_+$ e $\inf_I f_+ = 0 < -\inf_I f$ e quindi, su tali intervalli, $\operatorname{osc}(f_+, I) \le \operatorname{osc}(f, I)$. Ne segue che

$$\begin{aligned}
\sum_{I\in \mathrm{P}} \operatorname{osc}(f_+, I)|I| &= \sum_{I \in \mathrm{P}_+} \operatorname{osc}(f_+, I)|I| + \sum_{I\in\mathrm{P}_0} \operatorname{osc}(f_+, I)|I| \\
&= \sum_{I \in \mathrm{P}_+} \operatorname{osc}(f, I)|I| + \sum_{I\in\mathrm{P}_0} \operatorname{osc}(f_+, I)|I| \\
&\le \sum_{I \in \mathrm{P}_+} \operatorname{osc}(f, I)|I| + \sum_{I\in\mathrm{P}_0} \operatorname{osc}(f, I)|I| \\
&\le \sum_{I \in \mathrm{P}} \operatorname{osc}(f, I)|I| < \varepsilon \ ,
\end{aligned}$$

quindi f_+ è integrabile.
$f_- = (-f)_+$ e quindi l'integrabilità di f_- segue dal punto (i) e dall'integrabilità della parte

positiva.
$|f| = f_+ + f_-$ e quindi è integrabile per il punto (i) e per l'integrabilità di $f_\pm$.
L'integrabilità di $\max\{f,g\}$ segue osservando che $\max\{f,g\} = (f-g)_+ + g$. Segue poi l'integrabilità di $\min\{f,g\} = -\max\{-f,-g\}$.
Dimostriamo ora l'integrabilità di f^2. Sia $M = \sup_E |f|$, sia $\varepsilon > 0$ e sia P tale che

$$\sum_{I\in \mathrm{P}} \mathrm{osc}\,(f,I)|I| < \frac{\varepsilon}{2M} \ . \tag{8.18}$$

Osserviamo che, per ogni $x, y \in I$,

$$|f(x)^2 - f(y)^2| = |f(x)-f(y)||f(x)+f(y)| \le 2M|f(x)-f(y)| \le 2M\,\mathrm{osc}\,(f,I) \ ,$$

e dunque $\mathrm{osc}\,(f^2,I) \le 2M\,\mathrm{osc}\,(f,I)$ e quindi da (8.18) segue

$$\sum_{I\in \mathrm{P}} \mathrm{osc}\,(f^2,I)|I| \le 2M \sum_{I\in \mathrm{P}} \mathrm{osc}\,(f,I)|I| < \varepsilon \ .$$

L'integrabilità di fg segue dunque da (i) e dall'identità $fg = \big((f+g)^2 - f^2 - g^2\big)/2$.
(iii): Se f è integrabile e positiva si ha che $\overline{S}_E(f,\mathrm{P}) \ge 0$ per ogni $\mathrm{P} \in \mathcal{P}(E)$ e quindi

$$\int_E f = \inf_{\mathrm{P}\in\mathcal{P}(E)} \overline{S}_E(f,\mathrm{P}) \ge 0 \ .$$

Quindi se $g \ge f$ ossia $g - f \ge 0$ si ha

$$0 \le \int_E (g-f) \overset{\text{(i)}}{=} \int_E g \ - \ \int_E f \ .$$

(iv) segue da (iii) osservando che $-|f| \le f \le |f|$ e da (i).
(v) Se $I = E$ non c'è nulla da dimostrare. Assumiamo dunque $I \subsetneqq E$ e sia P_0 una qualunque partizione che contenga I (in generale si può prendere una partizione di tre o due elementi[4]). Dato $\varepsilon > 0$ sia $\mathrm{P} \in \mathcal{P}(E)$ come in (8.12) e sia poi $\mathrm{P}_1 = \mathrm{P} \wedge \mathrm{P}_0$: chiaramente P_1 è unione disgiunta di intervalli $\mathrm{P}_2 := \{I'_j\}$ che formano una partizione di I e di intervalli $\mathrm{P}_3 := \{I''_k\}$ contenuti in $E\backslash I$. Per cui

$$\begin{aligned}
\overline{S}_I(f,\mathrm{P}_2) - \underline{S}_I(f,\mathrm{P}_2) \quad &\le \quad \overline{S}_I(f,\mathrm{P}_2) - \underline{S}_I(f,\mathrm{P}_2) + \sum_k \big(\sup_{I''_k} f - \inf_{I''_k} f\big)|I''_k| \\
&= \quad \overline{S}_E(f,\mathrm{P}_1) - \underline{S}_E(f,\mathrm{P}_1) \\
&\overset{(8.4)}{\le} \quad \overline{S}_E(f,\mathrm{P}) - \underline{S}_E(f,\mathrm{P}) < \varepsilon \ ,
\end{aligned}$$

e quindi $f \in \mathcal{R}(I)$.
Dimostriamo ora la (8.17) per $n = 2$; il caso generale segue poi immediatamente per induzione su n. Sia quindi $E = I_1 \cup I_2$ con $I_1 \le I_2$ intervalli disgiunti e si noti che se

$$\mathrm{P}_1 \in \mathcal{P}(I_1) \ , \ \mathrm{P}_2 \in \mathcal{P}(I_2) \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{P}_1 \cup \mathrm{P}_2 \in \mathcal{P}(E) \ . \tag{8.19}$$

Quindi

$$\begin{cases} \underline{S}_{I_1}(f,\mathrm{P}_1) + \underline{S}_{I_2}(f,\mathrm{P}_2) = \underline{S}_E(f,\mathrm{P}_1\cup\mathrm{P}_2) \le \displaystyle\int_E f \\[2ex] \displaystyle\int_E f \le \overline{S}_E(f,\mathrm{P}_1\cup\mathrm{P}_2) = \overline{S}_{I_1}(f,\mathrm{P}_1) + \overline{S}_{I_2}(f,\mathrm{P}_2) \end{cases} \tag{8.20}$$

[4]Ad esempio, se $E = [0,1)$ e $I = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, possiamo prendere $\mathrm{P}_0 = \big\{[0,\frac{1}{3}], (\frac{1}{3},\frac{2}{3}), [\frac{2}{3},1)\big\}$.

Prendendo l'estremo superiore nella prima riga su $\mathrm{P}_1 \in \mathcal{P}(I_1)$ e $\mathrm{P}_2 \in \mathcal{P}(I_2)$ si ottiene

$$\underline{\int_{I_1}} f + \underline{\int_{I_2}} f \le \underline{\int_E} f$$

e prendendo l'estremo inferiore nella seconda riga su $\mathrm{P}_1 \in \mathcal{P}(I_1)$ e $\mathrm{P}_2 \in \mathcal{P}(I_2)$ si ottiene

$$\overline{\int_E} f \le \overline{\int_{I_1}} f + \overline{\int_{I_2}} f \ . \qquad \blacksquare$$

Proposizione 8.12 (3° Criterio di integrabilità) *$f \in \mathcal{R}(E)$ se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esistono due funzioni semplici $f^-, f^+ \in \mathcal{S}(E)$ tali che*[5]

$$f^- \le f \le f^+ \quad (\text{su } E) \quad \text{e} \quad \int_E (f^+ - f^-) < \varepsilon \ , \qquad \big(f^\pm \in \mathcal{S}(E)\big) \tag{8.21}$$

Dimostrazione Data una partizione $\mathrm{P} = \{I_j\} \in \mathcal{P}(E)$ definiamo le seguenti funzioni in $\mathcal{S}(E)$:

$$f_\mathrm{P}^- := \sum_{j=1}^n (\inf_{I_j} f)\ \chi_{I_j} \ , \qquad f_\mathrm{P}^+ := \sum_{j=1}^n (\sup_{I_j} f)\ \chi_{I_j} \ . \tag{8.22}$$

Chiaramente,

$$f_\mathrm{P}^-(x) \le f(x) \le f_\mathrm{P}^+(x) \ , \ \forall x \in E \ , \quad \int_E (f_\mathrm{P}^+ - f_\mathrm{P}^-) = \overline{S}_E(f, \mathrm{P}) - \underline{S}_E(f, \mathrm{P}) \ . \tag{8.23}$$

Quindi se f è integrabile, da (8.12) segue (8.21) con $f^- = f_\mathrm{P}^-$ e $f^+ = f_\mathrm{P}^+$.
Viceversa, assumiamo (8.21) con

$$f^\pm = \sum_{j=1}^{n_\pm} \alpha_j^\pm \chi_{I_j^\pm} \in \mathcal{S}(E) \ ,$$

e siano $\mathrm{P}^\pm$ due partizioni di E che contengano, rispettivamente, gli intervalli $\{I_j^\pm\}$; sia, infine $\mathrm{P} = \mathrm{P}^+ \wedge \mathrm{P}^-$. Poiché ogni intervallo $I \in \mathrm{P}$ appartiene anche a $\mathrm{P}^\pm$, se $f_\mathrm{P}^\pm$ sono come in (8.22), si ha

$$\inf_I f^- \le \inf_I f_\mathrm{P}^- \le \sup_I f_\mathrm{P}^+ \le \sup_I f^+ \ . \tag{8.24}$$

Dunque:

$$\begin{aligned} \sum_{I \in \mathrm{P}} \operatorname{osc}(f, I)|I| &\overset{(8.23)}{=} \int_E (f_\mathrm{P}^+ - f_\mathrm{P}^-) \overset{(8.17)}{=} \sum_{I \in \mathrm{P}} \int_{I_j} (f_\mathrm{P}^+ - f_\mathrm{P}^-) \overset{(8.24)}{\le} \sum_{I \in \mathrm{P}} \int_{I_j} (f^+ - f^-) \\ &\overset{(8.17)}{=} \int_E (f^+ - f^-) \overset{(8.21)}{<} \varepsilon \ , \end{aligned}$$

il che implica, per il 2° criterio, che f è integrabile su E. $\blacksquare$

[5]Non confondere il simbolo $f^\pm$ qui usato per denotare funzioni semplici, con $f_\pm$ che denotano la parte positiva/negativa di f.

Osservazione 8.13 (i) Se f è integrabile su $[a,b]$ si ha che[6]

$$\int_{[a,b]} f = \int_{[a,a]} f + \int_{(a,b)} f + \int_{[b,b]} f = \int_{(a,b)} f$$

e analogamente se f è integrabile su $[a,b)$ o $(a,b]$: in altre parole *il valore dell'integrale di f su E non dipende dall'appartenenza o meno degli estremi ad E*. Questo permette di definire in modo non ambiguo per una funzione f integrabile su un intervallo E con estremi a e b

$$\int_a^b f := \int_E f \quad \text{o equivalentemente} \quad \int_a^b f(x)dx = \int_E f(x)dx \ . \tag{8.25}$$

Questa è la notazione classica.

(ii) Quindi se E è un intervallo limitato di estremi $a < b$ e $f \in \mathcal{R}(E)$, si ha che

$$\int_a^c f + \int_c^b f = \int_a^b f \ , \qquad \forall\ a < c < b \ . \tag{8.26}$$

È utile rimuovere il vincolo di ordine nella (8.26). A questo scopo poniamo la seguente

Definizione 8.14 *Sia E un intervallo limitato e $f \in \mathcal{R}(E)$ se $d > c$ sono punti in $\overline{E}$ poniamo*

$$\int_d^c f := -\int_c^d f \ , \qquad \forall\ d > c \ , \ (c, d \in \overline{E}) \ . \tag{8.27}$$

Da questa definizione segue facilmente che vale la (8.26) *a prescindere* dall'ordine di a, b, c:

$$\int_a^c f + \int_c^b f = \int_a^b f \ , \qquad \forall\ a, b, c \in \overline{E} \ ; \tag{8.28}$$

ad esempio, se $c < a < b$

$$\int_a^c f + \int_c^b f := -\int_c^a f + \int_c^b f \overset{(8.26)}{=} -\int_c^a f + \int_c^a f + \int_a^b f = \int_a^b f \ .$$

Gli altri casi si trattano in modo analogo e vengono lasciati per esercizio.

Esercizio 8.3 Verificare la (8.28) per tutte le relazioni tra a, b e c.

Esercizio 8.4 Dimostrare che: *$f \in \mathcal{R}(E)$ se e solo se esistono due successioni di funzioni semplici in $\mathcal{S}(E)$, $\{f_n^-\}$ e $\{f_n^+\}$, tali che*

$$f_n^- \le f_{n+1}^- \le f \le f_{n+1}^+ \le f_n^+ \ , \forall n \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} \int_E (f_n^+ - f_n^-) = 0 \tag{8.29}$$

ed in tal caso,

$$\int_E f_n^- \nearrow \int_E f \swarrow \int_E f_n^+ \ . \tag{8.30}$$

Suggerimento: Se vale (8.29), l'integrabilità di f segue immediatamente dal 3° criterio di integrabilità. Viceversa, se $f \in \mathcal{R}(E)$, per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste una partizione $\hat{\mathrm{P}}_n$ di E tale $\overline{S}_E(f, \hat{\mathrm{P}}_n) - \underline{S}_E(f, \hat{\mathrm{P}}_n) < \frac{1}{n}$. Si definisca ricorsivamente, $\mathrm{P}_1 := \hat{\mathrm{P}}_1$ e per $n \ge 2$, $\mathrm{P}_n = \hat{\mathrm{P}}_n \wedge \mathrm{P}_{n-1}$. In tal modo $\mathrm{P}_1 \prec \mathrm{P}_2 \prec \cdots \prec \mathrm{P}_n \prec \cdots$, e $\hat{\mathrm{P}}_n \prec \mathrm{P}_n$. Quindi $\overline{S}_E(f, \mathrm{P}_n) - \underline{S}_E(f, \mathrm{P}_n) < \frac{1}{n}$ e la tesi segue con $f_n^- := f_{\mathrm{P}_n}^-$ e $f_n^+ := f_{\mathrm{P}_n}^+$.

[6] Si ricordi che $|[a,a]| = 0$.

1.4 Integrabilità delle funzioni continue

Una classe importante di funzioni integrabili sono le funzioni continue:

Proposizione 8.15 (i) *Sia E un intervallo limitato e $f : E \to \mathbb{R}$ limitata e continua. Allora $f \in \mathcal{R}(E)$ e*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \Big| \quad \overline{S}_E(f, \mathrm{P}) - \underline{S}_E(f, \mathrm{P}) < \varepsilon \quad \forall \mathrm{P} \in \mathcal{P}(E) \text{ con } \operatorname{diam}(\mathrm{P}) \le \delta \ . \tag{8.31}$$

(ii) *Se f è lipschitziana su E con costante di Lipschitz*[7] *L, (8.31) vale con $\delta < \varepsilon/(L|E|)$.*

Dimostrazione (i) Se $E = [a, b]$ è chiuso (e quindi compatto) la dimostrazione di (8.31) è immediata: infatti per il Teorema di Heine–Cantor, f è uniformemente continua su E e quindi esiste $\delta > 0$ tale che $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$ per ogni $x, y \in E$, $|x - y| < \delta$, il che implica, per (8.14), che $(\sup_{I_j} f - \inf_{I_j} f) \le \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$. Allora, se $\mathrm{P} = \{I_j\}$ è una qualunque partizione con $\operatorname{diam}(\mathrm{P}) < \delta$ si ha

$$\overline{S}_E(f, \mathrm{P}) - \underline{S}_E(f, \mathrm{P}) \overset{(8.13)}{=} \sum_{j=1}^{n} (\sup_{I_j} f - \inf_{I_j} f)|I_j| \le \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \sum_{j=1}^{n} |I_j| = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \ . \tag{8.32}$$

Consideriamo ora il caso in cui E non sia chiuso. Sia $M := \sup_E f - \inf_E f = \operatorname{osc}(f, E)$; sia $a = \inf E$ e $b = \sup E$ e fissiamo

$$\delta_0 < \min\Big\{\frac{b-a}{4}, \frac{\varepsilon}{6M}\Big\} \ . \tag{8.33}$$

Si noti che f è uniformemente continua su[8] $[a + \delta_0, b - \delta_0]$ e quindi esiste $\delta < \delta_0$ tale che

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{3(b-a)} \ , \qquad \forall \ x, y \in [a + \delta_0, b - \delta_0] \ , \ |x - y| < \delta \ , \tag{8.34}$$

il che implica

$$\operatorname{osc}(f, I) \le \frac{\varepsilon}{3(b-a)} \ , \quad \forall \ I \subseteq [a + \delta_0, b - \delta_0] \ , \ |I| \le \delta \ . \tag{8.35}$$

Sia ora $\mathrm{P} = \{I_j\} \in \mathcal{P}(E)$ una partizione (che possiamo assumere) ordinata con $\operatorname{diam}(\mathrm{P}) \le \delta$. Sia $k_1 \ge 2$ il primo indice per cui[9] $\inf I_{k_1} \ge a + \delta_0$ e $k_2 > k_1$ l'ultimo indice per cui $\sup I_{k_2} \le b - \delta_0$, cosicché $I_j \subseteq [a + \delta_0, b - \delta_0]$ per ogni $k_1 \le j \le k_2$ e

$$\bigcup_{j=1}^{k_1 - 1} I_j \subseteq [a, a + 2\delta_0] \ , \qquad \bigcup_{j=k_2+1}^{n} I_j \subseteq [b - 2\delta_0, b] \ , \qquad \bigcup_{j=k_1}^{k_2} I_j \subseteq [a + \delta_0, b + \delta_0] \ . \tag{8.36}$$

[7] Ossia, $|f(x) - f(y)| \le L|x - y|$ per ogni $x, y \in E$.
[8] $b - \delta_0 > a + \delta_0$ essendo $\delta_0 < (b - a)/4 < (b - a)/2$ per (8.33).
[9] Essendo $\delta < \delta_0$, $\inf I_2 = \sup I_1 \le a + \delta < a + \delta_0$ e quindi $k_1 \ge 2$.

Allora, (ricordando (8.13) e (8.14) e che $M := \sup_E f - \inf_E f = \operatorname{osc}(f, E) \geq \operatorname{osc}(f, I_j)$ per ogni j) si ha che

$$\begin{aligned}
\overline{S}_E(f,\mathrm{P}) - \underline{S}_E(f,\mathrm{P}) &= \sum_{j=1}^{n} \operatorname{osc}(f, I_j)|I_j| \\
&= \sum_{j=1}^{k_1-1} \operatorname{osc}(f, I_j)|I_j| + \sum_{j=k_1}^{k_2} \operatorname{osc}(f, I_j)|I_j| + \sum_{j=k_2+1}^{n} \operatorname{osc}(f, I_j)|I_j| \\
&\leq M \sum_{j=1}^{k_1-1} |I_j| + \frac{\varepsilon}{3(b-a)} \sum_{j=k_1}^{k_2} |I_j| + M \sum_{j=k_2+1}^{n} |I_j| \\
&\overset{(8.36)}{\leq} M 2\delta_0 + \frac{\varepsilon}{3(b-a)}(b-a) + M 2\delta_0 \overset{(8.33)}{<} \varepsilon\ .
\end{aligned}$$

(ii) Se f è lipschitziana su E con costante di Lipschitz L, allora $\operatorname{osc}(f, I) \leq L|I|$ per ogni intervallo $I \subseteq E$ e quindi, se P è una partizione di E con $\operatorname{diam}(\mathrm{P}) \leq \delta < \varepsilon/(L|E|)$ si ha

$$\overline{S}_E(f,\mathrm{P}) - \underline{S}_E(f,\mathrm{P}) = \sum_{j=1}^{n} \operatorname{osc}(f, I_j)|I_j| \leq \sum_{j=1}^{n} L\delta\, |I_j| < \frac{\varepsilon}{|E|} \sum_{j=1}^{n} |I_j| = \varepsilon\ . \quad \blacksquare$$

Ad esempio, la funzione $\operatorname{sen}(1/x)$ è integrabile su $(0, b)$ per ogni $b > 0$.

1.5 Integrabilità delle funzioni monotone

Un'altra classe notevole di funzioni integrabili è quella delle funzioni monotone.

Lemma 8.16 *Sia E un intervallo limitato e $f : E \to \mathbb{R}$ monotona e limitata. Allora:*

$$\sum_{j=1}^{n} \operatorname{osc}(f, I_j) \leq \operatorname{osc}(f, E)\ , \qquad \forall\ \{I_j\} \in \mathcal{P}(E)\ . \tag{8.37}$$

Dimostrazione Poiché[10] $\operatorname{osc}(-f, A) = \operatorname{osc}(f, A)$ possiamo assumere che f sia monotona crescente. Osserviamo anche che il caso generale segue facilmente dal caso $n = 2$ (per induzione). Quindi consideriamo solamente il caso f crescente e $n = 2$.
Se $x_1 \leq x_2 \leq y_1 \leq y_2$ con $x_1, x_2 \in I_1$ e $y_1, y_2 \in I_2$, essendo $f(x_2) - f(y_1) \leq 0$, si ha che

$$f(x_2) - f(x_1) + f(y_2) - f(y_1) \leq f(y_2) - f(x_1) \leq \operatorname{osc}(f, E) \tag{8.38}$$

e prendendo il sup su $x_1, x_2 \in I_1$ e $y_1, y_2 \in I_2$ si ottiene la tesi. $\blacksquare$

Corollario 8.17 *Sia E un intervallo limitato e $f : E \to \mathbb{R}$ monotona e limitata. Allora $f \in \mathcal{R}(E)$ e, se f è non costante*[11]*,*

$$\forall \varepsilon > 0\ , \forall \mathrm{P} \in \mathcal{P}(E)\ \Big|\ \operatorname{diam}(\mathrm{P}) \leq \delta < \frac{\varepsilon}{\operatorname{osc}(f, E)} \implies \overline{S}_E(f,\mathrm{P}) - \underline{S}_E(f,\mathrm{P}) < \varepsilon\ . \tag{8.39}$$

Dimostrazione Sia $M := \operatorname{osc}(f, E) > 0$. Dal Lemma segue che se $\varepsilon > 0$ e $\mathrm{P} = \{I_j\} \in \mathcal{P}(E)$ con $\operatorname{diam}(\mathrm{P}) \leq \delta < \varepsilon/M$ allora

$$\overline{S}_E(f,\mathrm{P}) - \underline{S}_E(f,\mathrm{P}) = \sum_{j=1}^{n} \operatorname{osc}(f, I_j)|I_j| \leq \frac{\varepsilon}{M} \sum_{j=1}^{n} \operatorname{osc}(f, I_j) \leq \frac{\varepsilon}{M} M = \varepsilon. \quad \blacksquare$$

---

[10] Cfr. Es. 8.2–(ii).

[11] $\operatorname{osc}(f, E) = 0$ se e solo se f è costante e le funzioni costanti sono integrabili (Esempio 8.5).