Capitolo 7

Derivate e Primitive

1 Definizione ed esempi

Una proprietà locale fondamentale delle funzioni è la derivabilità:

Definizione 7.1 *Sia I un intervallo non degenere di $\mathbb{R}$ e $f : I \to \mathbb{R}$.*
(i) *Per ogni $x, y \in I$, $x \neq y$ la funzione simmetrica di due variabili*[1]

$$R_f(x,y) := R(x,y) := \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \ , \qquad (x, y \in I, x \neq y) \tag{7.1}$$

si chiama **rapporto incrementale** *di f tra i punti x e y.*
(ii) *La funzione f si dice* **derivabile** *in $x \in I$ se esiste (finito) il limite del rapporto incrementale R_f per y che tende a x ossia se*

$$\lim_{y \to x} R_f(y,x) := \lim_{y \to x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = L \in \mathbb{R}; \tag{7.2}$$

in tal caso, il numero reale L si chiama **derivata** *di f in $x \in I$ e si denota con $f'(x)$ o con $Df(x)$. Se $A \subseteq \mathbb{R}$ e $f : A \to \mathbb{R}$, f è derivabile in $x \in A$ se esiste un intervallo $I \subseteq A$ non degenere, $x \in I$ e f è derivabile in x.*

Osservazione 7.2 (i) Facendo il cambio di variabile $y = x + h$ si vede immediatamente che $f : A \to \mathbb{R}$ è derivabile in $x \in A$ se e solo se esiste finito il limite

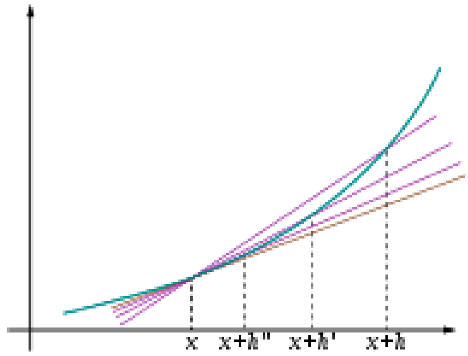
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} =: f'(x) \in \mathbb{R} \ . \tag{7.3}$$

(ii) (*Interpretazione geometrica della derivata*)
Consideriamo il grafico G_f di una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ derivabile in $x_0 \in I$ (I intervallo) . Se $x_0, x_1 \in I$, la retta "secante" passante per i punti $(x_0, f(x_0)$ e $(x_1, f(x_1))$ ha equazione $y = f(x_0) + R_f(x_1, x_0)(x - x_0)$. Facendo tendere x_1 a x_0 otteniamo la retta

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \tag{7.4}$$

che *definisce* la **retta tangente a G_f nel punto** $(x_0, f(x_0))$.

[1] In altri termini $R_f : (x,y) \in I \times I \backslash \{(x,x) \big| x \in I\} \to R(x,y) \in \mathbb{R}$; "simmetrica" significa $R_f(x,y) = R_f(y,x)$ (proprietà che segue immediatamente dalla definizione).



Secanti e retta tangente

(iii) (*Interpretazione dinamica della derivata*)
Consideriamo un punto materiale vincolato a muoversi su una retta in cui la variabile $x \in \mathbb{R}$ denota la distanza ("con segno") del punto dall'origine $x = 0$. Supponiamo che il punto si muova sulla retta secondo una "legge oraria" $t \in \mathbb{R} \mapsto x(t) \in \mathbb{R}$: $x(t)$ denota la posizione del punto sulla retta all'istante t. La *velocità media* tra gli istanti t e $t+s$ è definita come

$$v_{\text{med}}(t+s,t) := \frac{x(t+s)-x(t)}{s} \ . \tag{7.5}$$

Dunque tale velocità media coincide con il rapporto incrementale $R_x(t+s,t)$. La *velocità istantanea* $v(t)$ all'istante t è, per definizione, il limite (qualora esista) della velocità media $v_{\text{med}}(t+s,t)$ per s che tende a 0, ossia

$$v(t) := x'(t) = \lim_{s\to 0} \frac{x(t+s)-x(t)}{s} \ . \tag{7.6}$$

(iv) Spesso, con abuso di notazione, l'espressione $f(x)$ indica la *funzione* $x \in A \mapsto f(x)$, piuttosto che il *valore* della funzione f nel punto $x \in A$; ad esempio $\operatorname{sen} x$ o $\log x$ denotano, normalmente, le *funzioni* $x \in \mathbb{R} \mapsto \operatorname{sen} x$ e $x \in (0,+\infty) \mapsto \log x$. In maniera analoga, spesso, la derivata di f nel punto x, si denota con $\big(f(x)\big)'$ e talvolta, quando questa notazione potrebbe dar adito ad ambiguità tra la *variabile* x e il punto fissato x in cui si calcola la derivata, si scriverà, $\big(f(x)\big)'(x_0)$ o $\big(f(x)\big)'\big|_{x=x_0}$ o, ancora, $\big(f(x)\big)'\big|_{x_0}$ al posto della più corretta notazione $f'(x_0)$ (e analogamente usando il simbolo D al posto dell'apice).
Questa "ambiguità" risale alle origini stesse del calcolo differenziale. Infatti, la notazione "classica" di derivata, dovuta a Gottfried Wilhelm Leibnitz e ancora largamente adottata, è $\dfrac{df}{dx}(x_0)$: qui il ruolo della x nel[2] "dx" è puramente formale e denota semplicemente la variabile della funzione f, esattamente come menzionato sopra, nella notazione $\big(f(x)\big)'(x_0)$.
La notazione con l'apice è, invece, legata all'altro padre fondatore del calcolo differenziale, ossia, Sir Isaac Newton, il quale, motivato da problemi dinamici, denota la velocità di un punto con legge oraria $t \to x(t)$ con $\dot{x}(t)$.

Esempio 7.3 (i) La derivata di una funzione identicamente costante e uguale a $c \in \mathbb{R}$ o della funzione identità si calcolano immediatamente:

$$Dc = \lim_{h\to 0} \frac{c-c}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0 \ , \qquad \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)-x}{h} = \lim_{h\to 0} 1 = 1 \ . \tag{7.7}$$

[2]peraltro, al momento non ha un particolare significato matematico, anche se in seguito vedremo che dx è la notazione standard per il differenziale della funzione identità o per una "forma differenziale")

Analogamente, facendo uso della formula del binomio di Newton, si calcola facilmente la derivata del monomio x^n con $n \geq 2$ (intero):

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - h^n}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} x^k h^{n-k} = \lim_{h\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} x^k h^{n-k-1} \\
&= \lim_{h\to 0} \left(h^{n-1} + \cdots + \binom{n}{n-2} x^{n-2} h + \binom{n}{n-1} x^{n-1} \right) \\
&= n x^{n-1}. \qquad (7.8)
\end{aligned}$$

Mettendo assieme (7.7) e (7.8) si ha che, per ogni $x \in \mathbb{R}$ e per ogni $n \geq 1$,

$$(x^n)' = n x^{n-1} \ . \qquad (7.9)$$

(ii) Dai limiti notevoli (c) ed (e) di § 5–Cap. 3 segue:

$$\begin{aligned}
D \log x &:= \lim_{h\to 0} \frac{\log(x+h) - \log x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \log\left(1 + \frac{h}{x}\right) \\
&\overset{k=\frac{h}{x}}{=} \frac{1}{x} \cdot \lim_{k\to 0} \frac{\log(1+k)}{k} \\
&= \frac{1}{x}, \qquad (x > 0) \qquad (7.10) \\
De^x &:= \lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^x \ . \qquad (7.11)
\end{aligned}$$

Dalle formule di addizione trigonometriche e dai limiti notevoli su seno e coseno segue:

$$\begin{aligned}
D \operatorname{sen} x &:= \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x}{h} = \lim_{h\to 0} \left(\operatorname{sen} x \cdot \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \cdot \frac{\operatorname{sen} h}{h} \right) \\
&= \cos x \qquad (7.12)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D \cos x &:= \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = \lim_{h\to 0} \left(\cos x \cdot \frac{\cos h - 1}{h} - \operatorname{sen} x \cdot \frac{\operatorname{sen} h}{h} \right) \\
&= -\operatorname{sen} x \qquad (7.13)
\end{aligned}$$

Esercizio 7.1 Calcolare le derivate in $x = 0$ delle funzioni a^x, $\operatorname{senh} x$, $\operatorname{arcsenh} x$, $\cosh x$, $\tan x$, $\arctan x$. Calcolare la derivata in $x = 1$ di x^α.

Osservazione 7.4 Dalla definizione di derivata segue immediatamente che:
una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ derivabile in $x_0 \in A$ è continua in x_0.
infatti, dall'esistenza della derivata in x_0 e dall'algebra dei limiti segue che

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0} \big(f(x) - f(x_0)\big) &= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0) \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x\to x_0} (x - x_0) = f'(x_0) \cdot 0 \\
&= 0 \ . \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Osservazione 7.5 Dalla definizione di derivata segue immediatamente che
$f : A \to \mathbb{R}$ è derivabile in $x_0 \in A$ con derivata uguale ad L se e solo se

$$f(x) = f(x_0) + L(x - x_0) + \epsilon(x) \quad \text{con } x \in A \to \epsilon(x) \text{ t.c. } \lim_{x\to x_0} \frac{\epsilon(x)}{(x - x_0)} = 0 \ . \qquad (7.14)$$

La proprietà (7.14) viene anche chiamata **differenziabilità** di f in x_0.

Il viceversa non è vero, ossia, in generale, una funzione continua in x_0 può non avere derivata in x_0, come mostra il seguente

Esempio 7.6 Calcoliamo i limiti laterali in $x_0 = 0$ del rapporto incrementale della funzione modulo di x:

$$\lim_{h \to 0+} R_{|x|}(h, 0) = \lim_{h \to 0+} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \to 0+} \frac{h}{h} = 1$$
$$\lim_{h \to 0-} R_{|x|}(h, 0) = \lim_{h \to 0-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \to 0-} \frac{-h}{h} = -1$$

dunque la funzione (continua) $x \to |x|$ non è derivabile in $x_0 = 0$.

Il punto $x_0 = 0$ è un punto "angoloso" per la funzione modulo:

Definizione 7.7 *Sia $f : A \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in A$. Supponiamo che esita $\delta > 0$ tale che $(x_0 - \delta, x_0) \subseteq A$. Se esiste (finito) il limite del rapporto incrementale $\lim_{x \to x_0 -} R_f(x, x_0)$ diremo che la funzione f è* **derivabile in x_0 da sinistra** *e tale limite prende il nome di derivata sinistra di f in x_0 e si denota*

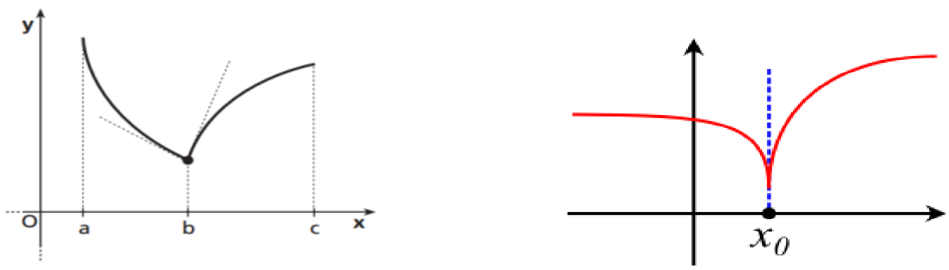
$$D_- f(x_0) = \lim_{x \to x_0 -} R_f(x, x_0) \ . \tag{7.15}$$

Analogamente, si definisce la derivata destra

$$D_+ f(x_0) = \lim_{x \to x_0 +} R_f(x, x_0) \ . \tag{7.16}$$

Osservazione 7.8 Ragionando come nella Osservazione 7.4 (ma "lateralmente") segue immediatamente che se f è derivabile da sinistra [destra] in x_0, allora f è continua da sinistra [destra] in x_0. Dunque, se esistono entrambe le derivate laterali, f è continua in x_0.

Definizione 7.9 *Se esistono le derivate laterali di f in x_0 ma $D_- f(x_0) \neq D_+ f(x_0)$, x_0 si dice un* **punto angoloso**.
Se f è continua in x_0 e $\lim_{x \to x_0 -} R_f(x, x_0) = -\infty$ e $\lim_{x \to x_0 +} R_f(x, x_0) = +\infty$, x_0 si chiama **cuspide**.



Punto angoloso e cuspide

Esercizio 7.2 (i) Dimostrare che $|\log x|$ ha un punto angoloso in $x_0 = 1$ e che $|x|^{1/3}$ ha una cuspide in $x_0 = 0$.

2 Regole di derivazione

In questo paragrafo discutiamo le principali proprietà e regole che permettono di calcolare la derivata sotto opportune ipotesi.
La prima proprietà fondamentale della derivata è la linearità:

Proposizione 7.10 (Linearità) *Se $f, g : A \to \mathbb{R}$ sono due funzioni derivabili in $x \in A$ allora, per ogni $a, b \in \mathbb{R}$, $af + bg$ è derivabile in x e*

$$(af + bg)'(x) = af'(x) + bg'(x) \ . \tag{7.17}$$

Se tale relazione è valida in ogni punto di A scriveremo, semplicemente,

$$(af + bg) = af' + bg' \qquad \text{oppure} \qquad D(af + bg) = aDf + bDg \ . \tag{7.18}$$

In altri termini, *la derivata è una "operazione" lineare su funzioni (derivabili).*

Dimostrazione (della Proposizione 7.10) L'asserto segue immediatamente dall'algebra dei limiti. ∎

Proposizione 7.11 *Siano $f, g : A \to \mathbb{R}$ due funzioni derivabili in $x_0 \in A$. Allora:*
(i) **(regola di Leibnitz)** *fg è derivabile in x_0 e*

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0) \ . \tag{7.19}$$

(ii) *Se $g(x_0) \neq 0$, allora $1/g$ è derivabile in x_0 e*

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)} \ . \tag{7.20}$$

(iii) *Se $g(x_0) \neq 0$, allora f/g è derivabile in x_0 e*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)} \ . \tag{7.21}$$

Dimostrazione (i):

$$\begin{aligned} R_{fg}(x_0, x_0 + h) &= \frac{f(x_0 + h)g(x_0 + h) - f(x_0)g(x_0)}{h} \\ &= \frac{f(x_0 + h)\big(g(x_0 + h) - g(x_0)\big) + \big(f(x_0 + h) - f(x_0)\big)g(x_0)\big)}{h} \\ &= f(x_0 + h)R_g(x_0 + h, x_0) + g(x_0)R_f(x_0 + h, x_0) \ , \end{aligned}$$

e prendendo il limite per h che tende a 0 si ha la tesi[3].
(ii) Poiché g è continua in x_0 (Osservazione 7.4), dal Teorema di permanenza del segno segue che $g \neq 0$ vicino a x_0 ossia $g(x_0 + h) \neq 0$ per h vicino a 0. Dunque

$$R_{\frac{1}{g}}(x_0 + h, x_0) = \frac{1}{h}\left(\frac{1}{g(x_0 + h)} - \frac{1}{g(x_0)}\right) = -\frac{R_g(x_0 + h, x_0)}{g(x_0 + h)g(x_0)}$$

e prendendo il limite per h che tende a 0 si ha la tesi.
(iii): Segue da (i) e (ii). ∎

[3] Si ricordi (Osservazione 7.4) che f è continua in x_0.

Proposizione 7.12 (regola della catena) *Sia $f : A \to B$ derivabile in $x_0 \in A$ e $g : B \to \mathbb{R}$ derivabile in $y_0 := f(x_0) \in B$. Allora $g \circ f$ è derivabile in x_0 e*

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(y_0) \cdot f'(x_0) \tag{7.22}$$

Dimostrazione Definiamo la seguente funzione

$$G : y \in B \mapsto G(y) := \begin{cases} R_g(y, y_0) & \text{se } y \neq y_0 \\ g'(y_0) & \text{se } y = y_0 \end{cases}$$

Da tale definizione, segue immediatamente che

$$g(y) - g(y_0) = G(y)(y - y_0) \ , \qquad \forall y \in B \ , \tag{7.23}$$

inoltre, essendo g derivabile in y_0, la funzione G è continua in y_0. Per il Corollario 2.51, la funzione $G \circ f$ è continua e quindi $\lim_{x \to x_0} G \circ f(x) = G \circ f(x_0) = G(y_0) = g'(y_0)$. Quindi:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{g\big(f(x)\big) - g\big(f(x_0)\big)}{x - x_0} \overset{(7.23)}{=} \lim_{x \to x_0} G \circ f(x) \ \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = g'(y_0) f'(x_0). \qquad \blacksquare$$

Passiamo, ora, alla derivata della funzione inversa.

Proposizione 7.13 *Sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione continua e iniettiva sull'intervallo I. Se f è derivabile in $x_0 \in I$ con $f'(x_0) \neq 0$, allora, la funzione inversa $f^{-1} : J := f(I) \to I$ è derivabile in $y_0 := f(x_0)$ e*

$$Df^{-1}(y_0) = \frac{1}{Df(x_0)} \ , \qquad \big(y_0 = f(x_0)\big) \ . \tag{7.24}$$

Dimostrazione Essendo f iniettiva $R_f(x, x_0) \neq 0$ per $x \neq 0$ e dunque la funzione

$$F(x) := \begin{cases} \dfrac{1}{R_f(x, x_0)} & \text{se } x \neq x_0 \\ \dfrac{1}{f'(x_0)} & \text{se } x = x_0 \end{cases}$$

è ben definita e (per l'algebra dei limiti ed essendo f derivabile in x_0 con derivata non nulla) continua su I. Per il Teorema 6.43 f^{-1} è continua sull'intervallo J e, dunque, (essendo la composizione di funzioni continue continua)

$$\begin{aligned} \frac{1}{f'(x_0)} &= F(x_0) = F \circ f^{-1}(y_0) = \lim_{y \to y_0} F \circ f^{-1}(y) = \lim_{y \to y_0} \frac{1}{\dfrac{y - y_0}{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}} \\ &= \ = \lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \lim_{y \to y_0} R_{f^{-1}}(y, y_0) =: Df^{-1}(y_0). \qquad \blacksquare \end{aligned}$$

Esercizio 7.3 Sia $I_n := \Big[\frac{1}{n}, \frac{1}{n} + \frac{1}{2^n}\Big]$, $I = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n$ e

$$f(x) := \begin{cases} x & \text{se } x \notin I \\ \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} & \text{se } x \in I_n \end{cases} \tag{7.25}$$

(i) Dimostrare che se $n \neq m$, $I_n \cap I_m = \emptyset$.
(ii) Dimostrare (usando la (7.14)) che f è derivabile in 0 e che $f'(0) = 1$.

Osservazione 7.14 L'esempio nell'esercizio precedente mostra che

una funzione può essere derivabile in un punto con derivata diversa da 0 ma essere non iniettiva (né continua) in alcun intervallo contenente 0.

Esempio 7.15 Le regole di derivazione permettono di calcolare le derivate delle funzioni elementari. Ad esempio:
(i) Dalla regola della catena (e dalla linearità della derivata) segue se f è derivabile in x_0 allora $f(-x)$ è derivabile in $-x_0$ e $D(f(-x))|_{x=x_0} = -f'(x_0)$. Da cui segue immediatamente che

$$D\,\mathrm{senh}\, x = \frac{1}{2}D(e^x - e^{-x}) = \frac{1}{2}\big(e^x - (-e^{-x})\big) = \cosh x$$

e analogamente si trova $D\cosh x = \mathrm{senh}\, x$.
(ii) Sempre dalla regola della catena e dalla derivata dell'esponenziale, (7.11), si ha che

$$Da^x = D\exp(\log a \cdot x) = D\exp(y)|_{y=\log a\cdot x} \cdot D(\log a \cdot x) = \log a \cdot a^x .$$

Se $x > 0$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, la derivata di $x^\alpha = \exp(x \log \alpha)$ si calcola allo stesso modo e si ottiene

$$Dx^\alpha = D\exp(\alpha \log x) = \exp(\alpha \log x) \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1} .$$

(iii) Dalle derivate di seno e coseno ((7.12) e (7.13)) e dalla regola di derivazione del rapporto (7.21) si ha che

$$D\tan x = \frac{(D\,\mathrm{sen}\, x)\cos x - \mathrm{sen}\, x D\cos x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \mathrm{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} . \tag{7.26}$$

(iv) Vediamo, infine, un'applicazione della regola di derivazione della funzione inversa: sia $y = \arctan x$ e, quindi, $x = \tan y$. Allora,

$$D\arctan x = \frac{1}{(D\tan y)|_{y=\arctan x}} \overset{(7.26)}{=} (\cos^2 y)|_{y=\arctan x}$$

ma da $x = \tan y$ segue che

$$x^2 = \frac{\mathrm{sen}^2 y}{\cos^2 y} = \frac{1-\cos^2 y}{\cos^2 y} = \frac{1}{\cos^2 y} - 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \cos^2 y = \frac{1}{1+x^2}$$

da cui

$$D\arctan x = \frac{1}{1+x^2} .$$

Altre derivate elementari si calcolano in modo del tutto simile. Nella seguente tabella raccogliamo le derivate delle funzioni elementari principali[4].

[4] Per una tabella più ampia vedi https://en.wikibooks.org/wiki/Calculus/Tables_of_Derivatives

$f(x)$	I	$f'(x)$
x^n , $(n \in \mathbb{Z})$	$\mathbb{R}$	$n\,x^{n-1}$
x^α, $(\alpha \in \mathbb{R})$	$\mathbb{R}_+$	$\alpha\,x^{\alpha-1}$
e^x	$\mathbb{R}$	e^x
a^x	$\mathbb{R}$	$\log a \cdot a^x$
$\log\lvert x\rvert$	$\{x \neq 0\}$	$\dfrac{1}{x}$
$\log_a \lvert x\rvert$	$\{x \neq 0\}$	$\dfrac{1}{x\log a}$
$\sinh x$	$\mathbb{R}$	$\cosh x$
$\cosh x$	$\mathbb{R}$	$\sinh x$
$\tanh x$	$\mathbb{R}$	$\dfrac{1}{\cosh^2 x}$
$\sinh^{-1} x = \log(x + \sqrt{x^2+1})$	$\mathbb{R}$	$\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$\cosh^{-1} x = \log(x + \sqrt{x^2-1})$	$\{x > 1\}$	$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\tanh^{-1} x = \dfrac{1}{2}\log\dfrac{1+x}{1-x}$	$\{\lvert x\rvert < 1\}$	$\dfrac{1}{1-x^2}$
$\sin x$	$\mathbb{R}$	$\cos x$
$\cos x$	$\mathbb{R}$	$-\sin x$
$\tan x$	$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) + \pi\mathbb{Z}$	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$
$\operatorname{cotan} x$	$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) + \pi\mathbb{Z}$	$-\dfrac{1}{\sin^2 x}$
$\operatorname{arcsen} x$	$\{\lvert x\rvert < 1\}$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x = \dfrac{\pi}{2} - \operatorname{arcsen} x$	$\{\lvert x\rvert < 1\}$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan x$	$\mathbb{R}$	$\dfrac{1}{1+x^2}$
$\operatorname{arccot} x = \dfrac{\pi}{2} - \arctan x$	$\mathbb{R}$	$-\dfrac{1}{1+x^2}$

Derivate elementari. I è il dominio della funzione $f : x \in I \mapsto f(x) \in \mathbb{R}$

Esercizio 7.4 Dimostrare tutte le formule della tavola sopra riportata.