3 Teoremi elementari sulle derivate

In questo paragrafo vediamo come la derivata dia informazioni sull'"andamento" di una funzione (ossia aiuti a determinare le regioni in cui la funzione cresce o decresce) e quindi sui sui punti "estremali" ossia dove la funzione assume dei massimi o minimi locali.
Cominciamo con alcune definizioni.

Definizione 7.16 (i) *Sia* $f : A \to \mathbb{R}$ *e* $x_0 \in A$. *Se esiste un intorno* U *di* x_0 *per cui*

$$f(x) \geq f(x_0) \; [f(x) > f(x_0)] \quad \forall x \in (U \cap A) \backslash \{x_0\} \; , \tag{7.27}$$

diciamo che f *ha un* **minimo locale** [**stretto**] *in* x_0*; se la* (7.27) *vale con il* $\leq$ $[<]$ *parleremo di* **massimo locale** [**stretto**] .
Un punto x_0 *che sia di massimo o minimo locale per* f *si chiama* **punto estremale** *per* f.
(ii) *Se* $f : A \to \mathbb{R}$ *è derivabile in* x_0 *e* $f'(x_0) = 0$, x_0 *si chiama* **punto critico**.

Un primo semplice risultato è il seguente:

Proposizione 7.17 *Sia* $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
(i) f *è* [*strettamente*] *crescente su* $A \iff R_f(x, y) \geq 0 \; [R_f(x, y) > 0]$, $\forall\, x, y \in A$, $x \neq y$.
(ii) *Se* f *è crescente* [*decrescente*] *su* A *ed è derivabile in* $x_0 \in A$ *allora* $f'(x_0) \geq 0$ $[f'(x_0) \leq 0]$.

Dimostrazione (i) segue immediatamente dalla definizione di rapporto incrementale.
(ii) Se f è crescente, da (i) segue che $R_f(x, y) \geq 0$ e dal teorema del confronto segue che $f' \geq 0$ (a analogamente nel caso decrescente). ∎

Osservazione 7.18 Si noti che una funzione può essere strettamente crescente ma avere derivata nulla in qualche punto: è questo il caso della funzione $x \to x^3$ che è strettamente crescente su $I = \mathbb{R}$ ma ha derivata nulla in $x = 0$.

Proposizione 7.19 (Teorema di Fermat sui punti critici) *Se* $x_0 \in \mathring{A}$ *è un punto di minimo o massimo locale per* $f : A \to \mathbb{R}$ *ed* f *è derivabile in* x_0 *allora* x_0 *è un punto critico di* f*, ossia,* $f'(x_0) = 0$*; in altre parole, i punti estremali interni sono punti critici.*

Dimostrazione Supponiamo x_0 sia un punto di minimo locale. Poiché x_0 è anche un punto interno, esiste un intervallo aperto $U \subseteq A$ contenente x_0 tale che $f(x) \geq f(x_0)$ per ogni $x \in U$. Dunque il numeratore di $R_f(x, x_0) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ è non negativo in U mentre il denominatore è positivo per $x > x_0$ e negativo per $x < x_0$. Dunque

$$\lim_{x_0+} R_f(x, x_0) \geq 0 \geq \lim_{x_0-} R_f(x, x_0) \; ,$$

e, siccome f è derivabile in x_0, i limiti laterali di $R_f(\cdot, x_0)$ coincidono e quindi $f'(x_0) = 0$.
Se x_0 è un punto di massimo locale, allora $-f$ ha un minimo locale e la tesi segue da quanto già dimostrato. ∎

Esempio 7.20 (i) Il teorema di Fermat fornisce uno strumento per individuare i punti estremali ed eventualmente il massimo e minimo di una funzione. Supponiamo, ad, esempio, di avere una funzione f continua su un intervallo compatto $[a, b]$ che sia derivabile in (a, b) tranne, al più, in un numero finito di punti $x_1, ..., x_N$. Per il teorema di Weierstrass, f assume massimo M e minimo m su $[a, b]$ e tali valori verranno trovati valutando la funzione negli

estremi a e b, nei punti critici[5] e nei punti x_i dove f non è derivabile: per il teorema di Fermat, M ed m verranno necessariamente assunti in uno di tali punti.
(ii) Il teorema di Fermat può essere utile anche nel caso di domini illimitati. Ad esempio, se $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ è continua e derivabile in $(0, +\infty)$ ed esiste il limite finito $L = \lim_{x\to+\infty} f(x)$, allora la funzione definita come $F(x) := f(x/(1-x))$ per $x \in [0, 1)$ e $F(1) := L$ è continua su $[0, 1]$ e derivabile in[6] $(0, 1)$.

Proposizione 7.21 (Teorema di Rolle) *Siano $a < b$ numeri reali e f una continua su $[a, b]$ e derivabile su (a, b). Se $f(a) = f(b)$ allora esiste un punto critico $x_0 \in (a, b)$.*

Dimostrazione Se f è costante allora ogni punto $x_0 \in (a, b)$ è un punto critico. Supponiamo ora f non identicamente costante. Per il teorema di Weierstrass, f ammette massimo e minimo sul compatto $[a, b]$ e (essendo f non costante) o il massimo o il minimo (o tutti e due) sono assunti all'interno e la tesi segue dal teorema di Fermat. ∎

Proposizione 7.22 (Teorema del valor medio di Cauchy) *Siano $a < b$ numeri reali e f e g funzioni continue su $[a, b]$ e derivabili su (a, b). Allora esiste un punto $x_0 \in (a, b)$ tale che*

$$f'(x_0)\big(g(b) - g(a)\big) = g'(x_0)\big(f(b) - f(a)\big) \ . \tag{7.28}$$

Dimostrazione Sia $F(x) := f(x)\big(g(b) - g(a)\big) - g(x)\big(f(b) - f(a)\big)$. Dalle ipotesi segue che F è continua su $[a, b]$ e derivabile su (a, b). Inoltre $F(a) = f(a)g(b) - g(a)f(b) = F(b)$ e la tesi segue dal teorema di Rolle. ∎

Proposizione 7.23 (Teorema del valor medio di Lagrange) *Siano $a < b$ numeri reali e f una continua su $[a, b]$ e derivabile su (a, b). Allora esiste $x_0 \in (a, b)$ tale che*

$$f(b) - f(a) = f'(x_0)(b - a) \ . \tag{7.29}$$

Dimostrazione Segue dal Teorema del valor medio di Cauchy con $g(x) = x$. ∎

Il Teorema del valor medio di Lagrange ha molte applicazioni interessanti. Ad esempio

Corollario 7.24 *Se f e g sono derivabili su un intervallo I e $f'(x) = g'(x)$ per ogni $x \in I$ allora esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che $f = g + c$.*

Dimostrazione Sia $F = f - g$. Dalle ipotesi segue che $F' = 0$ su I. Se $x < y$ sono due punti qualunque in I, per il teorema del valor medio di Lagrange (applicato con $a = x$ e $b = y$ e $f = F$), esiste un punto $x_0 \in (x, y)$ tale che $F(y) - F(x) = F'(x_0) \cdot (y - x) = 0$, ossia, $F(x) = F(y) =: c$. ∎

In particolare, dunque,

$$f \textit{ derivabile su } I \textit{ intervallo e } f' = 0 \textit{ su } I \quad \Longrightarrow \quad f \equiv \text{ cost} \ . \tag{7.30}$$

[5] Naturalmente potrebbero esserci un numero infinito di punti critici come per la funzione $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ che vale 0 in $x = 0$ e $x \operatorname{sen}(1/x)$ per $x \in (0, 1]$: tale funzione è continua su $[0, 1]$ derivabile in $(0, 1]$ e i suoi punti critici sono dati da $x_k = 1/y_k$ con $k \in \mathbb{N}$, dove $y_k \in (k\pi, (k + \frac{1}{2})\pi)$ sono le infinite soluzioni positive dell'equazione $\tan y = y$.

[6] $F'(x) = f'(x/(1-x))/(1-x)^2$ e quindi $F'(x) = 0$ se e solo se $f'(x/(1-x)) = 0$.

Esercizio 7.5 Dimostrare che valgono le seguenti identità

$$2\,\mathrm{Arctan}\,(x+\sqrt{x^2-1}) = \pi - \mathrm{Arcsen}\,\frac{1}{x}\,, \qquad x \geq 1 \tag{7.31}$$

$$\mathrm{Arctan}\,x = \frac{\pi}{2} - \mathrm{Arctan}\,\frac{1}{x} \tag{7.32}$$

Suggerimento: Derivare e usare il Corollario 7.24.

Un'altra conseguenza immediata del Teorema del valor medio di Lagrange è che se f è derivabile in (a,b) e $f' \geq 0$ $[f' > 0]$ su (a,b), allora per ogni $a < x < y < b$, $f(y) - f(x) = f'(x_0)(y-x) \geq 0$ $[f(y)-f(x) = f'(x_0)(y-x) > 0]$, ossia f è [strettamente] crescente. Applicando lo stesso ragionamento a $-f$ si ottiene che se f è derivabile in (a,b) e $f' \leq 0$ $[f' < 0]$ su (a,b), allora f è [strettamente] decrescente. Mettendo assieme queste osservazioni con la Proposizione 7.17 si ottiene:

Corollario 7.25 *Siano $a < b$ numeri reali e f una funzione derivabile su (a,b).*
(i) $f' \geq 0$ $[f' \leq 0]$ *su (a,b) se e solo se f è crescente [decrescente] su (a,b).*
(ii) *Se $f' > 0$ $[f' < 0]$ su (a,b), allora f è strettamente crescente [strettamente decrescente] su (a,b).*

Osservazione 7.26 Il punto (ii) del Corollario 7.25 implica, a sua volta, il seguente "teorema della funzione inversa":

Sia f derivabile con derivata continua in un intorno di un punto x_0. Se $f'(x_0) \neq 0$, esiste un intorno di x_0 in cui f è invertibile con funzione inversa $g := f^{-1}$ derivabile con derivata continua (e tale che $g'(y) = 1/f' \circ g(y)$).

Dimostrazione Supponiamo che $f(x_0) > 0$ (altrimenti ragioniamo su $-f$). Dal teorema della permanenza del segno segue che esiste un intorno I di x_0 tale che $f'(x) > 0$ per ogni $x \in I$ e quindi dal punto (ii) del Corollario 7.25 segue che f è strettamente crescente su I e quindi invertibile. Il resto della tesi segue dalla Proposizione 7.13. ∎

Questo risultato ha importanti generalizzazioni in più dimensioni.

Esercizio 7.6 Sia $f(x) := x^2\,\mathrm{sen}\,(1/x)$ se $x \neq 0$ e $f(0) := 0$. Dimostrare che f è derivabile su $\mathbb{R}$ ma che non esiste $\lim_{x\to 0} f'(x)$.