4 Teorema di Bernoulli–Hôpital

Il teorema di Bernoulli–Hôpital[7] lega il comportamento del rapporto di due funzioni vicino a x_0 a quello del rapporto delle loro derivate. Un esempio molto semplice che deriva immediatamente dalla definizione di derivata è il seguente: consideriamo due funzioni derivabili in x_0 e tali che $f(x_0) = g(x_0) = 0$, $g \neq 0$ vicino a x_0 e $g'(x_0) \neq 0$, allora

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \quad = \quad \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \frac{1}{\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} \ .$$

Questa idea ha notevoli generalizzazioni e permette, tra l'altro, di semplificare (in alcuni casi) il calcolo di limiti "indeterminati" del tipo $\lim f/g$ con f e g che tendono simultaneamente a 0 o anche a $\pm\infty$.

Teorema 7.27 (Bernoulli–Hôpital) *Siano* $-\infty < a < x_0 \leq +\infty$*,* $I := (a, x_0)$*,* $\lambda \in \{0, +\infty, -\infty\}$ *e* $L \in \mathbb{R}^*$*. Siano* $f, g : I \to \mathbb{R}$ *due funzioni derivabili su* I *e tali che*

$$g' \neq 0 \text{ vicino a } x_0 \ , \qquad \lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = \lambda \ , \qquad \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \ . \tag{7.33}$$

Allora, $g \neq 0$ *vicino a* x_0 *e*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L \ . \tag{7.34}$$

Dimostrazione Dividiamo la dimostrazione (che in ultima analisi si basa sul teorema del valor medio di Cauchy) in quattro casi.

1) $\lambda = 0$, $x_0 \in \mathbb{R}$.
Estendiamo f e g su $(a, x_0]$ ponendo $f(x_0) = g(x_0) = 0$: poiché f e g sono continue (essendo derivabili) su I, si ha che f e g sono continue su I.
Essendo $g' \neq 0$ vicino a x_0 esiste $x_1 \in (a, x_0)$ tale che $g'(x) \neq 0$ per $x \in (x_1, x_0)$ e per tali x, dal Teorema del valor medio di Lagrange, segue che esiste un punto $y \in (x, x_0)$ tale che $g(x) = g(x) - g(x_0) = g'(y)(x - x_0) \neq 0$ e quindi $g(x) \neq 0$.
Ora, sia V un intorno arbitrario di L. Dal secondo limite in (7.33) segue che esiste $x_2 \in (x_1, x_0)$ tale che $f'(y)/g'(y) \in V$ per ogni $y \in (x_2, x_0) \subseteq (x_1, x_0)$. Dal Teorema del valor medio di Cauchy si ha che per ogni $x \in (x_2, x_0)$ esiste un punto y tra x e x_0 tale che

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(y)}{g'(y)}$$

e quindi tale valore appartiene a V che è quanto volevasi dimostrare.

2) $\lambda = +\infty$, $x_0 \in \mathbb{R}$.
Nel corso della dimostrazione ci sono alcune differenze a seconda che $L \in \mathbb{R}$ oppure $L = \pm\infty$. Cominciamo col fissare un intorno arbitrario di L:

$$V := \begin{cases} (L - \varepsilon, L + \varepsilon) \ , & \text{se } L \in \mathbb{R} \\ (M, +\infty) \ , & \text{se } L = +\infty \\ (-\infty, M) \ , & \text{se } L = -\infty \end{cases} \ . \tag{7.35}$$

[7]La paternità di questo tipi di risultati, normalmente noti come "regola di de l'Hôpital" (e quindi, implicitamente attribuiti al marchese G.F.A. de l'Hôpital) sembrano essere stati dimostrati da J. Bernoulli; per maggiori informazioni e referenze, vedi `https://en.wikipedia.org/wiki/L%27H%C3%B4pital%27s_rule`.

Da (7.33) segue che esiste $b \in (a, x_0)$ tale che per ogni $x \in [b, x_0)$ si ha:

$$f(x) > 0, \qquad g(x) > 0, \qquad \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \in \begin{cases} (L - \frac{\varepsilon}{2}, L + \frac{\varepsilon}{2}) \ , & \text{se } L \in \mathbb{R} \\ (2M, +\infty) \ , & \text{se } L = +\infty \\ (-\infty, 2M) \ , & \text{se } L = -\infty \end{cases} \tag{7.36}$$

Poiché $f, g \to +\infty$ per $x \to x_0$ si ha che esiste $x_1 \in (b, x_0)$ tale che

$$f(x) > 2f(b) \overset{(7.36)}{>} 0 \ , \qquad g(x) > 2g(b) \overset{(7.36)}{>} 0 \ , \quad \forall\, x \in (x_1, x_0) \ . \tag{7.37}$$

Grazie a (7.37) possiamo definire la seguente funzione continua (infatti, differenziabile)

$$h : (x_1, x_0) \to (0, +\infty) \ , \qquad h(x) := \frac{1 - \frac{g(b)}{g(x)}}{1 - \frac{f(b)}{f(x)}} \ . \tag{7.38}$$

Tale h soddisfa le seguenti proprietà

$$\frac{1}{2} < h(x) < 2 \quad \text{e} \quad \frac{f(x) - f(b)}{g(x) - g(b)} \cdot h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \ , \qquad \forall\, x \in (x_1, x_0) \ , \tag{7.39}$$

ed inoltre, poiché $f, g \to +\infty$ per $x \to x_0$, si ha anche che

$$\lim_{x \to x_0} h(x) = 1 \ . \tag{7.40}$$

Ora, nel caso $L \in \mathbb{R}$, $(L - \varepsilon)/(L - \frac{\varepsilon}{2}) < 1 < (L + \varepsilon)/(L + \frac{\varepsilon}{2})$, e quindi possiamo prendere un $x_2 \in (x_1, x_0)$ tale che per ogni $x \in (x_2, x_0)$ si ha

$$L - \varepsilon < \Big(L - \frac{\varepsilon}{2}\Big)\ h(x) < \Big(L + \frac{\varepsilon}{2}\Big) h(x) < L + \varepsilon \ . \tag{7.41}$$

Sia dunque $x \in (x_2, x_0) \subseteq (x_1, x_0) \subseteq (b, x_0)$ e si osservi che dal teorema del valor medio di Cauchy segue che esiste $\xi_0 \in (b, x)$ tale che

$$\frac{f(x)}{g(x)} \overset{(7.39)}{=} \frac{f(x) - f(b)}{g(x) - g(b)} \cdot h(x) = \frac{f'(\xi_0)}{g'(\xi_0)} \cdot h(x) \ . \tag{7.42}$$

Allora, per $x \in (x_2, x_0)$, si ha, nel caso $L \in \mathbb{R}$:

$$L - \varepsilon \overset{(7.41)}{<} \Big(L - \frac{\varepsilon}{2}\Big)\ h(x) \overset{(7.36)}{<} \frac{f'(\xi_0)}{g'(\xi_0)}\ h(x) \overset{(7.42)}{=} \frac{f(x)}{g(x)} \overset{(7.36)}{<} \Big(L + \frac{\varepsilon}{2}\Big)\ h(x) \overset{(7.41)}{<} L + \varepsilon \ ,$$

mentre, nel caso $L = +\infty$ e $L = -\infty$, si ha, rispettivamente:

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{g(x)} &\overset{(7.42)}{=} \frac{f'(\xi_0)}{g'(\xi_0)} h(x) \overset{(7.39)}{>} \frac{f'(\xi_0)}{g'(\xi_0)}\ \frac{1}{2} \overset{(7.36)}{>} M \\ \frac{f(x)}{g(x)} &\overset{(7.42)}{=} \frac{f'(\xi_0)}{g'(\xi_0)} h(x) \overset{(7.39)}{<} \frac{f'(\xi_0)}{g'(\xi_0)}\ \frac{1}{2} \overset{(7.36)}{<} M \ , \end{aligned}$$

dimostrando che $f(x)/g(x) \in V$, per ogni $x \in (x_2, x_0)$.

3) $\lambda = -\infty$ e $x_0 \in \mathbb{R}$.

Segue dal caso precedente ponendo $\hat{f} = -f$ e $\hat{g} = -g$.

4) $x_0 = +\infty$.
Questo caso si riduce ai casi precedenti tramite il cambio di variabile $x = a + \frac{1}{1-y}$. Più precisamente, poniamo, per $y \in (0,1)$:

$$\hat{f}(y) := f\Big(a + \frac{1}{1-y}\Big) \ , \qquad \hat{g}(y) := g\Big(a + \frac{1}{1-y}\Big) \ . \tag{7.43}$$

Tali funzioni sono definite su $(0,1)$ e (per il teorema di cambio di variabile sui limiti)

$$\lim_{y\to 1} \hat{f}(y) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lambda = \lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{y\to 1} \hat{f}(y) \ .$$

Inoltre, dalla regola della catena segue che

$$\hat{f}'(y) = f'\Big(a + \frac{1}{1-y}\Big) \cdot \frac{1}{(1-y)^2} \ , \qquad \hat{g}'(y) = g'\Big(a + \frac{1}{1-y}\Big) \cdot \frac{1}{(1-y)^2} \ ,$$

da cui segue che $\lim_{y\to 1} \hat{f}'/\hat{g}' = \lim_{x\to+\infty} f'/g' = L$. ∎

Osservazione 7.28 (i) Il teorema resta valido nel caso di limite sinistro ossia nel caso in cui le funzioni f e g sia definite su (x_0, a) con $-\infty \le x_0 < a < +\infty$ con x che tende a x_0: basta considerare le funzioni $\hat{f}(y) := f(2a - x)$ e $\hat{g}(y) = g(2a - y)$ sull'intervallo $(a, \hat{x}_0)$ con $\hat{x}_0 := 2a - x_0 > a$ ($\hat{x}_0 = +\infty$ se $x_0 = -\infty$) e utilizzare il teorema precedentemente dimostrato.
(ii) Dalla conoscenza dei limiti laterali segue la conoscenza del limite e quindi il teorema vale anche per punti interni ossia nel caso $f, g : I := (a,b) \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in (a,b)$.
(iii) Il "viceversa" del teorema di Bernoulli–Hôpital non vale, ossia, vi sono dei casi in cui il limite $\lim_{x\to x_0} f/g$ esiste ma non esiste il limite $\lim_{x\to x_0} f'/g'$: se $f(x) = \operatorname{sen} x$ e $g(x) = x$ con $x_0 = +\infty$ si ha che $\lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 0$ ma $\lim_{x\to+\infty} \frac{D \operatorname{sen} x}{Dx} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\cos x}{1}$ non esiste.
(iv) Spesso il teorema di Bernoulli–Hôpital si applica iterativamente: nel seguente esempio indichiamo con asterischi l'uso del teorema di Bernoulli–Hôpital

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{senh} 2x - 2 \operatorname{senh} x}{x^3} &\overset{(*)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{D(\operatorname{senh} 2x - 2\operatorname{senh} x)}{Dx^3} = \frac{2}{3} \lim_{x\to 0} \frac{\cosh 2x - \cosh x}{x^2} \\
&\overset{(**)}{=} \frac{2}{3} \lim_{x\to 0} \frac{D(\cosh 2x - \cosh x)}{Dx^2} = \frac{1}{3} \lim_{x\to 0} \frac{2 \operatorname{senh} 2x - \operatorname{senh} x}{x} \\
&= \frac{1}{3}\Big(2 \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{senh} 2x}{x} - \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{senh} x}{x}\Big) = 1
\end{aligned}$$

tali identità sono esatte ma in realtà l'uguaglianza $(*)$ si giustifica grazie all'uguaglianza $(**)$, in altri termini l'uso della regola è giustificata *a posteriori*.
(iv) L'ipotesi che $g' \neq 0$ vicino a x_0 non può essere indebolita così come l'ipotesi che il punto d'accumulazione x_0 sia un estremo o interno ad un intervallo come mostra il seguente esempio[8]: sia $f(x) = x + \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x$ e $g(x) = e^{\operatorname{sen} x} f(x)$, $I = \mathbb{R}$ e $x_0 = +\infty$; $\lambda := \lim_{x\to+\infty} f = \lim_{x\to+\infty} g = +\infty$. Calcolando il limite del rapporto delle derivate si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f'}{g'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2e^{-\operatorname{sen} x} \cos x}{x + (\cos x)(2 + \operatorname{sen} x)} = 0 \ . \tag{7.44}$$

D'altra parte, è chiaro che il limite $\lim_{x\to+\infty} f/g = \lim_{x\to+\infty} e^{-\operatorname{sen} x}$ non esiste (essendo questa una funzione periodica mai nulla). Il punto è che g' si annulla su una successione $x_k \nearrow +\infty$ e quindi non esiste alcun intorno di $+\infty$ in cui $g' \neq 0$.

[8]Questo esempio è un esempio dovuto al matematico austriaco Otto Stolz https://en.wikipedia.org/wiki/Otto_Stolz.

Esercizio 7.7 Dimostrare le affermazioni fatte al punto (iv) della precedente osservazione.

Esercizio 7.8 Siano $-\infty \le a \le x_0 \le b \le +\infty$, $a < b$; f derivabile in $(a,b)\backslash\{x_0\}$ e continua in x_0. Dimostrare che se $\lim_{x\to x_0} f'(x) = L \in \mathbb{R}$, allora f è derivabile in x_0 e $f'(x_0) = L$.
Mostrare tramite un esempio che l'ipotesi di continuità in x_0 non può essere rimossa.