5 Primitive

In questa sezione considereremo il problema di determinare una funzione la cui derivata sia una funzione assegnata.

Esempio 7.29 Consideriamo il moto di un punto materiale, vincolato a muoversi su una retta su cui sia stato fissato un sistema di riferimento $\{x \in \mathbb{R}\}$, che all'istante "iniziale" $t = t_0 \in \mathbb{R}$ si trovi nel punto $x_0 \in \mathbb{R}$ e che si muova con velocità istantanea $v(t) \in \mathbb{R}$ assegnata. Il problema è di determinare la posizione del punto al tempo t ossia di trovare una funzione derivabile $t \in \mathbb{R} \mapsto x(t) \in \mathbb{R}$ tale che

$$\begin{cases} x'(t) = v(t) \\ \\ x(t_0) = x_0 \ . \end{cases} \tag{7.45}$$

Nel Capitolo 9 vedremo che se $v \in C(\mathbb{R})$ il problema (7.45) ha sempre una soluzione, ed infatti, in tal caso, *la soluzione è unica*, come spiegato nella seguente

Osservazione 7.30 (i) Se $x(t)$ soddisfa (7.45) è (per definizione) derivabile e dunque (Osservazione 7.4) continua su $\mathbb{R}$.

(ii) Dal Corollario 7.24 segue immediatamente che[9]

Se f e g sono due funzioni derivabili definite su un intervallo I e se $f' = g'$ allora $f = g + c$ su I per una qualche costante $c \in \mathbb{R}$.

Da tale osservazione segue che

qualora esista, la soluzione $x(t)$ di (7.45) è unica.

Supponiamo, infatti, che $x_1(t)$ e $x_2(t)$ siano due funzioni derivabili che soddisfino (7.45), allora $(x_1(t) - x_2(t))' = x_1'(t) - x_2'(t) = v(t) - v(t) = 0$ e dunque $x_1(t) - x_2(t) \equiv c$ per una costante opportuna $c \in \mathbb{R}$; ma, d'altra parte, $x_1(t_0) - x_2(t_0) = x_0 - x_0 = 0$ e quindi $c = 0$, il che vuol dire $x_1(t) = x_2(t)$ per ogni t. ∎

(iii) Supponiamo di aver trovato una funzione $t \in I \mapsto X(t)$ tale che $X' = v$ su I. Allora, come è immediato verificare, la soluzione di (7.45) è data da $x(t) := X(t) + (x_0 - X(t_0))$. Quindi, per risolvere il problema (7.45) è sufficiente trovare una *qualunque* funzione derivabile $X(t)$ tale che $X' = v$ e poi "aggiustare il dato iniziale" traslando opportunamente i valori della funzione X.

(iv) Se v non è continua la soluzione di (7.45) può non esistere.
Questo è il caso, ad esempio, in cui v abbia una discontinuità eliminabile in $t = 0$ come mostra il seguente esempio: sia $t_0 = 0$ e

$$t \in \mathbb{R} \mapsto v(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \neq 0 \\ 1 & \text{se } t = 0 \end{cases} \tag{7.46}$$

e supponiamo che (7.45) abbia una soluzione $x(t)$. Allora, si avrebbe $x'(t) = 0$ su $\mathbb{R}_-$ e su $\mathbb{R}_+$ e quindi $x \equiv c_1$ su $\mathbb{R}_-$ e $x \equiv c_2$ su $\mathbb{R}_+$; ma $t \to x(t)$ (essendo derivabile in 0) è continua in 0 e quindi $c_1 = c_2$ ossia $x(t)$ deve essere identicamente costante, ma allora si avrebbe anche $x'(0) = 0 \neq v(0) = 1$.

(v) Il problema (7.45) è un esempio di *equazione differenziale* ed è legato alla interpretazione dinamica della derivata. L'altro motivo fondamentale di interesse per le primitive è legato alla geometria ed al calcolo di aree di figure piane: questo punto di vista verrà chiarito nel Capitolo 9.

[9] In tale affermazione, il fatto che I sia un intervallo è essenziale: ad esempio l'affermazione è falsa se $I = [0,1] \cup [2,3]$ e $f := 0$ su I e $g := 0$ su $[0,1]$ e $g := 1$ su $[2,3]$.

5.1 Definizioni, esempi e proprietà

Definizione 7.31 *Sia I un intervallo di $\mathbb{R}$ e $f : I \to \mathbb{R}$. Una* **primitiva** *di f è una funzione $F : I \to \mathbb{R}$ derivabile su I e tale che $F' = f$.*
L'insieme di tutte le primitive (o **la primitiva***) di una funzione f si denota con $D^{-1}f$:*

$$D^{-1}f = \{F : I \to \mathbb{R} \big| \, F'(x) = f(x) \ , \forall x \in I\}. \tag{7.47}$$

Facciamo alcune osservazioni iniziali, alcune delle quali sono parafrasi di quanto detto nel-l'Osservazione 7.30.

Osservazione 7.32 (i) *Le primitive* (essendo per definizione derivabili) *sono funzioni continue.*
(ii) Se F e G sono due primitive di una funzione data f sull'intervallo I, allora (Corollario 7.24) $F = G + c$ per una qualche $c \in \mathbb{R}$. In altri termini, *se F è una qualunque primitiva di f su I,*

$$D^{-1}f = \{F(x) + c \,|\, c \in \mathbb{R}\} \ . \tag{7.48}$$

(iii) Differire per una costante è una relazione di equivalenza: ossia se (fissato il dominio I) poniamo

$$F \sim G \quad \text{se e solo se} \quad F - G \equiv \ \text{costante su } I$$

la relazione "$\sim$" definisce, chiaramente, una relazione di equivalenza tra le funzioni (con dominio I). Dunque, $D^{-1}f$ è una classe di equivalenza di tale relazione ed è univocamente individuata da un qualunque suo membro (come, d'altra parte, sottolineato al punto (ii)).
(iv) Nel Capitolo 9 dimostreremo che se $f \in C(I)$, allora $D^{-1}f \neq \emptyset$, ma
se f non è continua sull'intervallo I, in generale, $D^{-1}f = \emptyset$.
Abbiamo, già visto (punto (iv) dell'Osservazione 7.30) che se f ha una discontinuità eliminabile (come la funzione in (7.46)) non esiste una sua primitiva in un intorno della discontinuità. Analogamente, se f ha una discontinuità di salto, $D^{-1}f = \emptyset$, come mostra il seguente esempio. Sia $f(x) := \operatorname{sgn}(x)$ e supponiamo che $F \in D^{-1}f$. Per $x > 0$ si avrebbe $F'(t) = 1$ e dunque (di nuovo per il Corollario 7.24) $F(x) = x + c_1$ per una qualche costante $c_1 \in \mathbb{R}$; analogamente $F'(x) = -1$ per $x < 0$ e dunque $F(x) = c_2 - x$ con $c_2 \in \mathbb{R}$. D'altra parte, (essendo F continua in $x = 0$) $\lim_{x \to 0-} F(x) = c_2 = \lim_{x \to 0+} F(x) = c_1$ e quindi $c_1 = c_2$ e $F(x) = c_1 + |x|$, ma tale funzione non è derivabile in $x = 0$.
D'altra parte, nel caso di f con discontinuità essenziale, può accadere che $D^{-1}f \neq \emptyset$. Si consideri, ad esempio, la funzione

$$f(x) := \begin{cases} \left(2x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}\right) - \cos \dfrac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \ . \end{cases} \tag{7.49}$$

Tale funzione ha una discontinuità essenziale il $x = 0$ poiché non esistono i limiti laterali $\lim_{x \to 0\pm} f(x)$. D'altra parte è facile vedere che la funzione

$$F(x) := \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \ , \end{cases} \tag{7.50}$$

è una primitiva di f.

Esercizio 7.9 Siano f e F sono come in (7.49) e (7.50). Verificare che f ha una discontinuità essenziale in $x = 0$ e che $F'(x) = f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Dalle formule di derivazione delle funzioni elementari segue immediatamente la seguente tabella di primitive[10] F di funzioni $f : I \to \mathbb{R}$.

$f(x)$	I	$F(x)$ t.c. $F'(x) = f(x)$
x^n , $(n \in \mathbb{Z}\setminus\{-1\})$	$\mathbb{R}_+$, $\mathbb{R}_-$, $\mathbb{R}$ (se $n \geq 0$)	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$
x^α, $(\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{-1\})$	$\mathbb{R}_+$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
e^x	$\mathbb{R}$	e^x
a^x	$\mathbb{R}$	$\dfrac{a^x}{\log a}$
$\dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_-$	$\log\lvert x\rvert$
$\sinh x$	$\mathbb{R}$	$\cosh x$
$\cosh x$	$\mathbb{R}$	$\sinh x$
$\dfrac{1}{\cosh^2 x}$	$\mathbb{R}$	$\tanh x$
$\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\mathbb{R}$	$\sinh^{-1} x$
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\{x > 1\}$	$\cosh^{-1} x$
$\dfrac{1}{1-x^2}$	$\{\lvert x\rvert < 1\}$	$\tanh^{-1} x$
$\sin x$	$\mathbb{R}$	$-\cos x$
$\cos x$	$\mathbb{R}$	$\sin x$
$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) + \pi\mathbb{Z}$	$\tan x$
$-\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) + \pi\mathbb{Z}$	$\text{cotan}\, x$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\{\lvert x\rvert < 1\}$	$\text{arcsen}\, x$
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$	$\arctan x$

Primitive di funzioni elementari

Esercizio 7.10 (i) Si dimostri che se $f : (-a, a) \to \mathbb{R}$ (con $a > 0$ o $a = +\infty$) è una funzione dispari e F è una sua primitiva, allora F è pari.

[10]Per una tabella più ampia vedi https://en.wikibooks.org/wiki/Calculus/Tables_of_Integrals

(ii) Si dimostri che se $f : (-a, a) \to \mathbb{R}$ (con $a > 0$ o $a = \infty$) è una funzione pari e F è una sua primitiva, allora esiste un unico $c \in \mathbb{R}$ tale che $F + c$ è dispari.

Le proprietà fondamentali delle primitive si derivano facilmente dalle proprietà delle derivate. Cominciamo col vedere come la linearità delle derivate si riflette sulle primitive:

Proposizione 7.33 *Siano $f, g : I \to \mathbb{R}$ e $a, b \in \mathbb{R}$ con $a \cdot b \neq 0$. Assumiamo che $D^{-1}f \neq \emptyset \neq D^{-1}g$. Allora*

$$a(D^{-1}f) + b(D^{-1}g) = D^{-1}(af + bg). \tag{7.51}$$

Dimostrazione Dimostriamo prima che $a(D^{-1}f) + b(D^{-1}g) \subseteq D^{-1}(af + bg)$. Se $F \in D^{-1}f$ e $G \in D^{-1}g$ allora $(aF + bG)' = aF' + bG' = af + bg$, ossia, $aF + bG \in D^{-1}(af + bg)$.
Dimostriamo che $D^{-1}(af + bg) \subseteq a(D^{-1}f) + b(D^{-1}g)$. I coefficienti a e b non sono entrambi nulli: assumiamo, ad esempio, che $a \neq 0$ e sia $H \in D^{-1}(af + bg)$, $F \in D^{-1}f$, $G \in D^{-1}g$. Allora $\big(H - (aF + bG)\big)' = H' - aF' - bG' = (af + bg) - af - bg = 0$ e quindi esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che $H = (aF + bG) + c$, ma allora $H = a\big(F + \frac{c}{a}\big) + bG \in a(D^{-1}f) + b(D^{-1}g)$. ∎

Esercizio 7.11 Si dimostri che se $D^{-1}f \neq \emptyset \neq D^{-1}g$, allora $D^{-1}(af + bg) \neq \emptyset$ (cosa che abbiamo usato nella seconda parte della dimostrazione della proposizione precedente).

Osservazione 7.34 Si noti che in generale la proposizione precedente è falsa se non assumiamo che $D^{-1}f \neq \emptyset \neq D^{-1}g$: ad esempio se $f(x) = \operatorname{sgn} x$, $g(x) = -\operatorname{sgn}(x)$ e $a = b = 1$, allora $D^{-1}(af + bg) = D^{-1}0 = \mathbb{R}$, ma, come già visto, $D^{-1}f = D^{-1}g = \emptyset$.
Anche l'ipotesi $a \cdot b \neq 0$ è necessaria: infatti se $a = b = 0$, $D^{-1}(af + bg) = D^{-1}0 = \mathbb{R}$, mentre $0 \cdot (D^{-1}f) + 0 \cdot (D^{-1}g) = \{0\}$.

La regola della derivata del prodotto di funzioni ha la seguente controparte per le primitive:

Proposizione 7.35 (Calcolo "per parti" di una primitiva) *Siano $f, g : I \to \mathbb{R}$ due funzioni derivabili sull'intervallo I e tali che $D^{-1}(f'g) \neq \emptyset \neq D^{-1}(fg')$. Allora si ha*[11]

$$D^{-1}(f'g) = fg - D^{-1}(fg') \ . \tag{7.52}$$

Dimostrazione La (7.52) è equivalente a dire che se $F \in D^{-1}(f'g)$ e $G \in D^{-1}(fg')$ allora esiste una costante $c \in \mathbb{R}$ tale che $F = fg - G + c$. Ma tale relazione è equivalente a $(F + G - fg)' = 0$ e calcolando tale derivata (usando la regola per la derivata del prodotto di funzioni) troviamo

$$(F + G - fg)' = F' + G' - (fg)' = f'g + fg' - (fg)' = f'g + fg' - (f'g + fg') = 0. \quad ∎$$

Infine la regola della catena ha la seguente controparte per le primitive:

Proposizione 7.36 (Calcolo "per sostituzione" di una primitiva) *Siano I, J intervalli di $\mathbb{R}$, $f : J \to \mathbb{R}$ e $g : I \to J$ funzioni derivabili con $D^{-1}f \neq \emptyset$. Allora se $F \in D^{-1}f$*

$$D^{-1}(f \circ g \cdot g') = \{F \circ g + c \big| \, c \in \mathbb{R}\} \ , \qquad \big(F \in D^{-1}f\big) \ . \tag{7.53}$$

Dimostrazione Dalla regola della catena segue che $(F \circ g + c)' = F' \circ g \cdot g' = f \circ g \cdot g'$. ∎

[11] Gli elementi dell'insieme (di funzioni) $fg - D^{-1}(fg')$ sono le funzioni $fg - G$ con $G \in D^{-1}(fg')$.

5.2 Esempi di calcolo di primitive

In questa sezione diamo degli esempi di come calcolare le primitive di alcune funzioni.

Osservazione 7.37 (i) Come detto più volte, ai fini di determinare la primitiva $D^{-1}f$ è sufficiente determinare *una* (qualunque) primitiva di f, poiché questa genererà per traslazione $D^{-1}f$.
(ii) È d'uso comune, nel calcolo delle primitive, usare la notazione classica introdotta da Leibnitz, e denotare la primitiva $D^{-1}f$ con uno dei seguenti equivalenti simboli

$$\int f(x)dx \qquad\qquad \int f(x) \qquad\qquad \int f\ . \tag{7.54}$$

Tali simboli vengono di solito chiamati "integrale indefinito di f": il termine "integrale" verrà ampiamente discusso nel Capitolo 9 ed il suo legame matematico con le primitive costituisce uno dei risultati più importanti e fondamentali della analisi; il termine "indefinito" invece si riferisce al fatto che le primitive di una funzione data differiscono per una costante.
Per i primi due simboli in (7.54) valgono le stesse osservazioni fatte al punto (iv) dell'Osservazione 7.2 (in particolare il ruolo della x è meramente di indicare la variabile generica di una primitiva di f).
(iii) Spesso, però, nei calcoli $\displaystyle\int f(x)dx$ denota, con abuso di notazione, un elemento della sua classe di equivalenza, ossia, una qualche specifica funzione di $D^{-1}f$ e, ad esempio, si scrive $\displaystyle\int \operatorname{sen} x = -\cos x$ o, più spesso (ma non meno ambiguamente) $\displaystyle\int \operatorname{sen} x = -\cos x + c$. Noi preferiamo omettere la costante c e con (conscio) abuso di notazione identificare l'integrale indefinito (ovvero la primitiva) con un suo elemento.

(a) (**Linearità, riscalamenti e traslazioni**) Se $F'(x) = f(x)$ allora una primitiva di $af(bx+c)$ è data da $\dfrac{a}{b}F(ax+c)$ (naturalmente sui corrispondenti domini). Ad esempio[12]

$$\int \frac{c}{x-x_0} = c\log|x-x_0|\ . \tag{7.55}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{2x^2+3}dx &= \frac{1}{3}\int \frac{1}{(\sqrt{2/3}\ x)^2+1}dx = \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}\arctan\Big(\frac{2}{3}x\Big)\\ &= \frac{1}{2}\arctan\Big(\frac{2}{3}x\Big).\end{aligned}\tag{7.56}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2+1}{x+1}dx &= \int\Big(x+1+\frac{2}{x-1}\Big)dx \overset{(7.51)}{=} \int xdx + \int 1dx + 2\int\frac{dx}{x-1}\\ &= \frac{x^2}{2} + x + \log|x-1|\ .\end{aligned}\tag{7.57}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{1-x^2}dx &= \frac{1}{2}\Big(\int \frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}\Big)dx = \frac{1}{2}\Big(\int\frac{1}{1-x}dx+\int\frac{1}{1+x}dx\Big)\\ &= \frac{1}{2}\Big(-\log|1-x|+\log|1+x|\Big)\\ &= \frac{1}{2}\log\Big|\frac{1+x}{1-x}\Big|\ .\end{aligned}\tag{7.58}$$

[12] Nei seguenti esempi faremo costantemente uso della tabella di primitive di § 5.1.

(b) (**Sostituzione**) Se l'"integrando" (ossia la funzione di cui vogliamo calcolare la primitiva) ha la forma $f \circ g \cdot g'$ e sappiamo che $F \in D^{-1} f$, allora, dalla formula (7.53), segue che una sua primitiva è $F \circ f$.

$$\int x\ e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int (x^2)'\ e^{x^2} \overset{(7.53)}{=} \frac{1}{2} e^{x^2}\ . \tag{7.59}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\operatorname{sen} x}\ dx &= \int \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}^2 x} dx = -\int \frac{(\cos x)'}{1-\cos^2 x} \\ &\overset{(7.53),(7.58)}{=} -\frac{1}{2} \log \left| \frac{1+\cos x}{1-\cos x} \right| = \frac{1}{2} \log \tan^2 \frac{x}{2} \\ &= \log \left| \tan \frac{x}{2} \right|\ . \end{aligned} \tag{7.60}$$

(c) (**Integrazione per parti**) Qui illustriamo la regola di calcolo di primitive per parti (o, più comunemente, "integrazione per parti") stabilita nella Proposizione 7.35.

$$\begin{aligned} \int x^2 \sinh x\ dx &= \int x^2 (\cosh x)'\ dx \overset{(7.52)}{=} x^2 \cosh x - 2 \int x \cosh x\, dx \\ &\overset{(7.52)}{=} x^2 \cosh x - 2\Big(x \operatorname{senh} x - \int \operatorname{senh} x dx \Big) \\ &= x^2 \operatorname{senh} x - 2x \operatorname{senh} x + 2 \cosh x\ . \end{aligned} \tag{7.61}$$

In generale, con questo metodo si calcolano integrali indefiniti della forma $\int P(x) f(x)$ dove P è un polinomio e f è una combinazione lineare di esponenziali o seni/coseni. Un esempio un po' diverso è il seguente:

$$\begin{aligned} \int e^x \operatorname{sen} x\, dx &\overset{(7.52)}{=} e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \cos x\, dx \overset{(7.52)}{=} e^x \operatorname{sen} x - \Big(e^x \cos x + \int e^x \operatorname{sen} x\, dx \Big) \\ &= e^x (\operatorname{sen} x - \cos x) - \int e^x \operatorname{sen} x\, dx \end{aligned}$$

da cui segue che

$$\int e^x \operatorname{sen} x\, dx - \frac{1}{2} e^x (\operatorname{sen} x - \cos x)\ . \tag{7.62}$$

(d) (**Integrazione di funzioni razionali**) Una classe generale di funzioni di cui, in teoria, è possibile calcolare le primitive sono le funzioni razionali ossia funzioni date dal rapporto di due polinomi. Alcuni esempi sono stati già visti al punto (a). Vediamone altri:

$$\begin{aligned} \int \frac{2x-1}{x^2+2x+2}\, dx &= \int \frac{2(x+1)-3}{(x+1)^2+1} = \int \frac{\big((x+1)^2\big)'}{(x+1)^2+1}\, dx - 3 \int \frac{dx}{(x+1)^2+1} \\ &= \log(x^2+2x+2) - 3 \arctan(x+1)\ . \end{aligned} \tag{7.63}$$

e, in generale, se $a, b, u \in \mathbb{R}$ e $v > 0$,

$$\int \frac{2a(x-u)+b}{(x-u)^2+v^2}\, dx = a \log\big((x-u)^2+v^2\big) + \frac{b}{v}\ \arctan \frac{x-u}{v}\ . \tag{7.64}$$

Esercizio 7.12 Dimostrare la (7.64).

La strategia per integrare una funzione razionale $f(x) = P(x)/Q(x)$ con P e Q polinomi (senza divisori comuni) è la seguente[13]:

(1) Se[14] $\deg P \geq \deg Q$, si effettua la divisione tra polinomi, ossia, si scrive $P = SQ+R$ con S e R polinomi e $\deg R < \deg Q$. Poiché la primitiva di un polinomio si calcola immediatamente ci si riduce, così, al caso di funzioni razionali $f = P/Q$ con $\deg P < \deg Q$.

(2) Dal Teorema fondamentale dell'algebra segue che un polinomio Q di grado $d \geq 1$ monico (ossia con il coefficiente davanti al monomio di grado d uguale ad 1) e a coefficienti reali si fattorizza in unico modo (a meno dell'ordine) come segue[15]:

$$Q(x) = (x-x_1)^{n_1} \cdots (x-x_r)^{n_r} \big((x-u_1)^2+v_1^2\big)^{m_1} \cdots \big((x-u_j)^2+v_j^2\big)^{m_j} \tag{7.65}$$

dove: $n_i, m_i \in \mathbb{N}_0$ (se $n_i = 0$ o $m_i = 0$ il fattore corrispondente è assente), $n_1 + \cdots + n_r + 2(m_1+\cdots+m_j) = d$, $x_i, u_i \in \mathbb{R}$, $v_i > 0$ (se $n_i \geq 1$). Tale fattorizzazione si chiama "fattorizzazione reale di Q".

(3) Secondo la formula di Hermite-Ostrograd[16] se $\deg P < \deg Q$ e (7.65) è la fattorizzazione reale di Q, e se poniamo[17]

$$\hat{Q} := (x-x_1)^{n_1-1} \cdots (x-x_r)^{n_r-1} \big((x-u_1)^2+v_1^2\big)^{m_1-1} \cdots \big((x-u_j)^2+v_j^2\big)^{m_j-1} \tag{7.66}$$

allora esistono numeri reali $c_1, \ldots, c_r$, $a_1, \ldots, a_j$, $b_1, \ldots, b_j$ e un polinomio reale $\hat{P}$ con $\deg \hat{P} = \deg \hat{Q} - 1$, tali che

$$\begin{aligned} \frac{P(x)}{Q(x)} &= \frac{c_1}{x-x_1} + \cdots + \frac{c_r}{x-x_r} + \\ &+ \frac{2a_1(x-u_1)+b_1}{(x-u_1)^2+v_1^2} + \cdots + \frac{2a_j(x-u_j)+b_j}{(x-u_j)^2+v_j^2} + D\Big(\frac{\hat{P}(x)}{\hat{Q}(x)}\Big) \ . \end{aligned} \tag{7.67}$$

Tale formula, (7.55) e (7.64) determinano immediatamente la primitiva di P/Q.

Vediamone due esempi. Vogliamo calcolare

$$\int \frac{x^3-1}{4x^3-x}\, dx \ .$$

Il passo (1) è la divisione: $x^3 - 1 = \frac{1}{4}(4x^3 - x) + \frac{1}{4}x - 1$ e dunque

$$\frac{x^3-1}{4x^3-x} = \frac{1}{4}\Big(1 + \frac{x-4}{x\,(4x^2-1)}\Big) =: \frac{1}{4}\Big(1 + \frac{P(x)}{Q(x)}\Big) \ .$$

[13] Vedi, anche, Cap. 7, §1 di [Giusti, E.: *Esercizi e complementi di Analisi Matematica*, Volume Primo, Bollati Boringhieri, 2000].

[14] $\deg P$ denota il grado di P.

[15] Naturalmente, la fattorizzazione di un polinomio può essere complicata e, in generale, "impossibile" (nel senso della teoria di Galois).

[16] Vedi, ad esempio, *How to Integrate Rational Functions*, T. N. Subramaniam and Donald E. G. Malm, The American Mathematical Monthly Vol. 99, No. 8 (Oct., 1992), pp. 762–772 http://www.jstor.org/stable/2324245.

[17] In tale formula se $n_i \leq 1$ o $m_i \leq 1$ i corrispondenti termini sono assenti; in particolare, se $n_i = 1\ \forall i$ e $m_i = 1\ \forall i$ l'ultimo addendo nella formula è assente.

(2): la fattorizzazione reale di[18] Q è: $Q(x) = x(2x-1)(2x+1)$. Dunque in questo caso il temine di derivata in (7.67) è assente e abbiamo una "decomposizione in fratti semplici":

$$\frac{x-4}{x\,(4x^2-1)} = \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{2x-1} + \frac{c_3}{2x+1}$$

da cui si ottiene facilmente $c_1 = 4$, $c_2 = -7/2$, $c_3 = -9/2$ e dunque

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3-1}{4x^3-x}\,dx &= \int \Big(\frac{1}{4} + \frac{1}{x} - \frac{7}{8}\,\frac{1}{2x-1} - \frac{9}{8}\,\frac{1}{2x+1}\Big)\,dx \\ &= \frac{x}{4} + \log|x| - \frac{7}{16}\,\log|2x-1| - \frac{9}{16}\log|2x+1| \\ &= \frac{x}{4} + \frac{1}{16}\log\frac{x^{16}}{|4x^2-1|^7\,(2x+1)^2}\ .\end{aligned}$$

Calcoliamo ora

$$\int \frac{dx}{(x+1)(x^2+1)^2}\ .$$

In questo caso, Q è già fattorizzato e $\hat{Q}(x) = x^2+1$. Dunque $\deg \hat{P} = 1$ e poniamo $\hat{P}(x) = Ax+B$. Dobbiamo determinare a, b, c, A, B in modo tale che valga (7.67), ossia:

$$\frac{1}{(x+1)(x^2+1)^2} = \frac{c}{x+1} + \frac{2ax+b}{x^2+1} + \Big(\frac{Ax+B}{x^2+1}\Big)'\ . \tag{7.68}$$

Calcolando la derivata otteniamo

$$\Big(\frac{Ax+B}{x^2+1}\Big)' = \frac{(Ax+B)'}{x^2+1} + (Ax+B)\Big(\frac{1}{x^2+1}\Big)' = \frac{-Ax^2-2Bx+A}{(x^2+1)^2}\ .$$

Inserendo tale espressione in (7.68) e svolgendo l'algebra si ottiene il sistema di cinque equazioni in cinque incognite

$$2a+c=0\ ,\ 2a-A+b=0\ ,\ 2a-A+b-2B+2c=0\ ,2a+A+b-2B=0\ ,\ A+b+c=1$$

che ha per soluzione

$$a = -\frac{1}{8}\ , \quad b = \frac{1}{2}\ , \quad c = A = B = \frac{1}{4}\ . \tag{7.69}$$

Quindi

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{(x+1)(x^2+1)^2} &\overset{(7.68),(7.69)}{=} \int \Big(\frac{1}{4}\,\frac{1}{x+1} + \frac{2(-\frac{1}{8})x+\frac{1}{2}}{x^2+1} + \frac{1}{4}\Big(\frac{x+1}{x^2+1}\Big)'\Big)\ dx \\ &= \frac{1}{4}\frac{x+1}{x^2+1} + \int\Big(\frac{1}{4}\,\frac{1}{x+1} + \frac{2(-\frac{1}{8})x+\frac{1}{2}}{x^2+1}\Big)\ dx \\ &\overset{(7.64)}{=} \frac{1}{4}\frac{x+1}{x^2+1} + \frac{1}{4}\ \log|x+1| - \frac{1}{8}\log(x^2+1) + \frac{1}{2}\arctan x\ .\end{aligned}$$

[18]Q non è monico ma è più semplice, in questo caso, mantenere il coefficiente 4 davanti al grado massimo (naturalmente questo comporta solo un innocuo riscalamento nelle costanti da determinare).

(e) (**Cambio di variabile**) Questa è una tecnica molto generale basata sul metodo di sostituzione che permette di trasformare gli integrali indefiniti in una forma equivalente e (si spera) più semplice da calcolare.
Nelle ipotesi della Proposizione 7.36 assumiamo anche che g sia iniettiva su I e denotiamo con $g^{-1} : y \in J \mapsto x \in I$ la sua inversa. Dunque, dalla formula (7.53) segue che

$$\hat{F} \in D^{-1}(f \circ g) \cdot g') \qquad \Longrightarrow \qquad \hat{F}|_{x=g^{-1}(y)} = \hat{F} \circ g^{-1} \in D^{-1}f \ . \tag{7.70}$$

Questa relazione assume un aspetto particolarmente suggestivo usando le notazioni di Leibnitz. Denotiamo con $x \in I \mapsto y = y(x) := g(x) \in J$ il cambio di variabile in considerazione e con $y \in J \mapsto x(y) := g^{-1}(y)$ il cambio di variabile inverso. Allora nelle notazioni di Leibnitz, la (7.70) diventa

$$\int (f \circ y)(x) \frac{dy}{dx}(x)\ dx\Big|_{x=x(y)} = \int f(y)dy \tag{7.71}$$

che diventa ancora più suggestiva se riscritta come

$$\int f(y)dy = \int f(y)\frac{dy}{dx}\ dx\Big|_{x=x(y)}. \tag{7.72}$$

Si osservi che, in queste formule, è utile esplicitare la variabile della primitiva (cosa suggerita naturalmente dalla notazione di Leibnitz) e soprattutto distinguere la x dalla y legate da un cambio di variabili e non già variabili mute.
Dunque, secondo la formula (7.72), *si ottiene una primitiva della funzione* $f : y \in J \mapsto \mathbb{R}$ *sull'intervallo* J *se si calcola una primitiva della funzione* $x \to f \circ y \cdot y' = (f \circ y)(x) \cdot y'(x)$ *sull'intervallo* I *e poi si riporta il risultato ottenuto nella variabile originaria ponendo*[19] $x = x(y)$.
Normalmente, scriveremo semplicemente

$$\int f(y)dy = \int f(y)\ y'\ dx \tag{7.73}$$

ricordando però, al termine del calcolo, di esprimere il risultato ottenuto nella variabile originaria ponendo $x = x(y)$.

Vediamone alcuni esempi.

(e1) Vogliamo calcolare $\displaystyle\int \frac{dy}{e^y+1}$. Poniamo $x = e^y + 1$ ossia $y = \log(x-1)$ (qui $x > 1$). Quindi $y' = \frac{1}{x-1}$ e

$$\begin{aligned}
\int \frac{dy}{e^y+1} &= \int \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x-1}dx = \int \Big(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}\Big)\,dx \\
&= \log\Big|\frac{x-1}{x}\Big| = \log\Big|\frac{x-1}{x}\Big|_{x=x(y)} \\
&= \log\frac{e^y}{e^y+1} = -\log(1+e^{-y})\ .
\end{aligned}$$

[19] In effetti, Leibnitz "giustificava" la (7.72) come una "semplificazione dei dx" che interpretava come un "incremento infinitesimale" delle variabili x.

(e2) Vogliamo calcolare $\displaystyle\int \frac{y^2}{\sqrt{1-y^2}}\,dy$. Qui si deve avere $|y|<1$. L'espressione $\sqrt{1-y^2}$ suggerisce di porre $y = \operatorname{sen} x$ con $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$: cosicché $y' = \cos x$ e $\sqrt{1-y^2} = |\cos x| = \cos x$ (essendo $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$). Quindi

$$\begin{aligned}\int \frac{y^2}{\sqrt{1-y^2}}\,dy &= \int \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos x}\,\cos x\,dx = \int \operatorname{sen}^2 x\,dx\\ &= \int \frac{1-\cos 2x}{2}\,dx = \frac{1}{2}\Big(x - \frac{\operatorname{sen} 2x}{2}\Big)\\ &= \frac{1}{2}(x - \operatorname{sen} x\cos x) = \frac{1}{2}\Big(x - \operatorname{sen} x\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 x}\Big)\Big|_{x=\operatorname{arcsen} y}\\ &= \frac{1}{2}\Big(\operatorname{arcsen} y - y\sqrt{1-y^2}\Big)\ .\end{aligned}$$

(e3) Naturalmente, questa tecnica può essere iterata, come mostra il seguente esempio. Vogliamo calcolare $\displaystyle\int \frac{dy}{(y+1)\sqrt{y^2+2y}}$ per $y \ge 0$. Innanzitutto, osserviamo che $y^2+2y = (y+1)^2-1$ e dunque facciamo un primo cambio di variabile $x = y+1$, e otteniamo

$$\int \frac{dy}{(y+1)\sqrt{y^2+2y}} = \int \frac{dx}{x\ \sqrt{x^2-1}}\ .$$

Ora, l'identità $\cosh^2 t - \operatorname{senh}^2 t = 1$, ossia, $\operatorname{senh}^2 t = \cosh^2 t - 1$ suggerisce un secondo cambio di variabile $x = \cosh t$ considerando $t \ge 0$, per cui $x' = \operatorname{senh} t$, $\sqrt{\cosh^2 t - 1} = |\operatorname{senh} t| = \operatorname{senh} t$ (essendo $t \ge 0$) e quindi

$$\int \frac{dx}{x\ \sqrt{x^2-1}} = \int \frac{dt}{\cosh t} = 2\int \frac{dt}{e^t + e^{-t}}\ .$$

Ora, poniamo $s = e^t$ ossia $t = \log s$, da cui $t'(s) = 1/s$ e troviamo

$$2\int \frac{dt}{e^t+e^{-t}} = 2\int \frac{ds}{s\Big(s+\frac{1}{s}\Big)} = 2\int \frac{ds}{s^2+1} = 2\arctan s\ .$$

Esprimendo il risultato nella variabile iniziale abbiamo[20]:

$$2\arctan s = 2\arctan e^t = 2\arctan(x+\sqrt{x^2-1}) = 2\arctan\Big((y+1)+\sqrt{y^2+2y}\Big)$$

e quindi, in definitiva,

$$\int \frac{dy}{(y+1)\sqrt{y^2+2y}} = 2\arctan\Big((y+1)+\sqrt{y^2+2y}\Big)\ . \tag{7.74}$$

Vi sono molte altre sostituzioni che permettono di ricondurre il calcolo di primitive a casi noti: vedi, ad esempio, il Cap. IV dell'intramontabile testo di esercizi [Demidovich, B.P., *Esercizi e problemi di Analisi Matematica*, Editori Riuniti, 2010].

[20] La relazione tra x e t è $x = \cosh t$ ossia $z^2 - 2xz + 1 = 0$ con $z = e^t \ge 1$, risolvendo questa equazione di secondo grado e (scartando la soluzione $z \le 1$) si trova $z = e^t = x + \sqrt{x^2-1}$.