6 Derivata seconda e punti estremali

Definizione 7.39 *Sia I un intervallo di $\mathbb{R}$ e $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile su I. Se f' è derivabile in $x_0 \in I$ diremo che f* **è derivabile due volte in** *x_0 e scriveremo*

$$(D^2 f)(x_0) := f''(x_0) := \big(f'\big)'(x_0) \; ; \tag{7.75}$$

il numero $f''(x_0)$ si chiama la **derivata seconda di** *f* **in** *x_0.*
Se f' è derivabile in ogni punto di I diremo che f **è derivabile due volte su** *I.*

La conoscenza del segno della derivata seconda in un punto stazionario dà informazioni sul "carattere locale" del punto:

Proposizione 7.40 *Sia I un intervallo di $\mathbb{R}$ e $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile su I e supponiamo che f sia derivabile due volte in $x_0 \in \mathring{I}$.*
(i) *Se x_0 è un punto critico per f e $f''(x_0) > 0$ $[f''(x_0) < 0]$. Allora, x_0 è un punto di minimo [massimo] locale stretto per f.*
(ii) *Se x_0 è un minimo [massimo] locale allora $f''(x_0) \geq 0$ $[f''(x_0) \leq 0]$.*

Dimostrazione Se $f''(x_0) > 0$, dal teorema di permanenza del segno e dal fatto che $f'(x_0) = 0$ segue che esiste un intorno $U \subseteq \mathring{I}$ di x_0 tale che $R_{f'}(x, x_0) = \frac{f'(x)}{x - x_0} > 0$ per ogni $x \in U \backslash \{x_0\}$. Ma questo significa che $f' < 0$ in $U \cap (-\infty, x_0)$ e $f' > 0$ in $U \cap (x_0, +\infty)$ e quindi, per il Corollario 7.25, f è strettamente decrescente in $U \cap (-\infty, x_0)$ e strettamente crescente in $U \cap (x_0, +\infty)$, il che equivale a dire che x_0 è un minimo locale stretto.
Il caso del massimo segue dal precedente applicato a $-f$.
(ii) Se x_0 è un minimo locale, per il teorema di Fermat, x_0 è un punto critico, e se fosse $f''(x_0) < 0$ si avrebbe una contraddizione col punto (i) e quindi $f''(x_0) \geq 0$.
Il caso del massimo segue dal precedente applicato a $-f$. ∎

Osservazione 7.41 Si noti che una funzione può avere un minimo locale stretto in x_0 ed avere la derivata seconda nulla in x_0 è questo il caso, ad esempio, di $x \to x^4$ in $x_0 = 0$.

7 Funzioni convesse

In questa sezione introdurremo il concetto di "convessità/concavità" di una funzione necessario a studiare la "geometria" del grafico di una funzione e che nel caso di funzioni regolari ha naturali interpretazioni in termini della derivata prima (e quindi della tangente al grafico) o di derivata seconda (che misura la "curvatura" del grafico).

In questa sezione f denota una funzione definita su un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$ e a valori in $\mathbb{R}$ e x_k punti di I.

7.1 Definizioni e proprietà generali delle funzioni convesse

Definizione 7.42 *Il* **birapporto incrementale**[21] *di f nei punti x_2, x_1 e x_0 diversi tra loro (cioè $x_2 \neq x_1 \neq x_0 \neq x_2$) è dato da:*

$$R_f^{(2)}(x_2, x_1, x_0) := \frac{R_f(x_2, x_0) - R_f(x_1, x_0)}{x_2 - x_1} \; . \tag{7.76}$$

[21] Da non confondere con il "birapporto" della geometria euclidea (vedi https://it.wikipedia.org/wiki/Birapporto).

dove R_f denota il rapporto incrementale (7.1).

Lemma 7.43 (i) *Il birapporto incrementale è una funzione simmetrica delle sue variabili, ossia: x_0: $R_f^{(2)}(x_2,x_1,x_0) = R_f^{(2)}(x_{j_1},x_{j_2}x_{j_3})$ per ogni permutazione*[22] (j_1,j_2,j_3) *di* $\{0,1,2\}$.
(ii) *Si ha:*

$$R_f^{(2)}(x_2,x_1,x_0) = -\frac{f(x_0) - \frac{x_0-x_2}{x_1-x_2} f(x_1) - \frac{x_1-x_0}{x_1-x_2} f(x_2)}{(x_2-x_0)(x_0-x_1)} \; . \tag{7.77}$$

Dimostrazione (i): Inserendo la definizione di R_f in (7.76) si trova

$$R_f^{(2)}(x_2,x_1,x_0) = \frac{f(x_0)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + \frac{f(x_1)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + \frac{f(x_2)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} \tag{7.78}$$

e tale espressione è chiaramente simmetrica in x_0, x_1 e x_2; il che prova (i).
(ii): La (7.77) segue da (7.78) mettendo in evidenza $1/((x_2-x_0)(x_0-x_1))$. ∎

Definizione 7.44 *f si dice convessa sull'intervallo I se*

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) \le tf(x_1) + (1-t)f(x_2) \; , \qquad \forall\, t \in (0,1) \; , \; \forall\, x_1, x_2 \in I \; . \tag{7.79}$$

Esercizio 7.12 (i) Si dimostri che che $x \to |x|$ è convessa su $\mathbb{R}$.
(ii) Si dimostri che la funzione $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ che vale 0 in $(0,1)$ e 1 in $x=0$ e $x=1$ è convessa.

Osservazione 7.45 (i) La (7.79) è simmetrica in x_1 e x_2 ed è simmetrica in t e $(1-t)$.
(ii) In vista dell'osservazione appena fatta al punto (i), possiamo assumere che $x_1 < x_2$ e, ponendo

$$t = \frac{x-x_2}{x_1-x_2} \quad \Longleftrightarrow \quad 1-t = \frac{x_1-x}{x_1-x_2} \quad \Longleftrightarrow \quad x = tx_1 + (1-t)x_2 \; , \tag{7.80}$$

si ha che $t \in (0,1)$ se e solo se $x \in (x_1,x_2)$, da cui segue immediatamente che (7.79) equivale a

$$\begin{aligned} f(x) \quad &\le \quad \frac{x-x_2}{x_1-x_2} f(x_1) + \frac{x_1-x}{x_1-x_2} f(x_2) \\ &= \quad f(x_1) + \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\,(x-x_1) \; , \qquad \forall\, x_1 < x < x_2 \; . \end{aligned} \tag{7.81}$$

Quindi, in vista di (7.77), si ha che:

$$f \text{ convessa} \quad \Longleftrightarrow \quad R_f^{(2)}(x_2,x_1,x) \ge 0 \quad \forall\, x_1 < x < x_2 \; . \tag{7.82}$$

(iii) Geometricamente la (7.81) si può interpretare dicendo che in ogni intervallo $[x_1,x_2]$ di I le ordinate del grafico di f sono al di sopra delle corrispondenti (cioè stessa ascissa x) ordinate della retta[23] passante per i punti $(x_1,f(x_1))$ e $(x_2,f(x_2))$.

[22] Una permutazione di un insieme finito $\{a_1,...,a_n\}$ è una applicazione iniettiva $j : \{1,...,n\} \to \{a_1,...,a_n\}$.
[23] Si ricorda che, per definizione, una retta in $\mathbb{R}^2$ (di coefficiente angolare $m \in \mathbb{R}$) è il grafico di una funzione lineare $r(x) = mx + c$; due rette si dicono parallele se hanno lo stesso coefficiente angolare; le rette parallele all'asse delle y sono date da $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\; x = c\}$ (e non sono grafici).

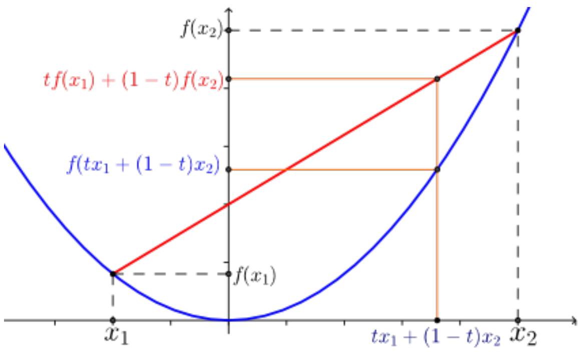

Figura 7.3: Convessità

Proposizione 7.46 *f è convessa se e solo sono vere le seguenti affermazioni:*
(i) $R_f^{(2)}(x_2, x_1, x_0) \geq 0$ *per ogni* $x_1 < x_0 < x_2$.
(ii) $x \to R_f(x, x_0)$ *è una funzione crescente in* $I \backslash \{x_0\}$.
(iii) $R_f(x_1, x_0) \leq R_f(x_2, x_0)$ *per ogni* $x_1 < x_0 < x_2$.

Dimostrazione Da (7.82) segue che f è convessa se e solo vale (i). Dalla Proposizione 7.17 (con $R_f(x, x_0)$ al posto di f) segue che (ii) è equivalente a $R_f^{(2)}(x_2, x_1, x_0) \geq 0$ per ogni tripla di punti diversi tra loro. Per la simmetria di $R_f^{(2)}$ (Lemma 7.43–(i)), possiamo assumere che $x_1 < x_0 < x_2$, e quindi (i) e (ii) sono equivalenti. L'equivalenza tra (ii) e (iii) è immediata. ■

Osservazione 7.47 (i) Se f è convessa, $x \to R_f(x, x_0)$ è una funzione crescente per ogni x_0 e quindi esistono finiti i limiti (tranne, al più, negli estremi di[24] I) per x che tende a x_0 da sinistra e destra di $R_f(\cdot, x_0)$, che per definizione sono la derivata sinistra e la derivata destra di f in x_0:

$$D_- f(x_0) := \lim_{x \to x_0-} R_f(x, x_0) \leq D_+ f(x_0) := \lim_{x \to x_0+} R_f(x, x_0) \ , \qquad \forall\, x_0 \in \mathring{I} \ . \tag{7.83}$$

In particolare, questo implica che f è continua in $\mathring{I}$ essendo[25]

$$\lim_{x \to x_0 \pm} f(x) - f(x_0) = \lim_{x \to x_0 \pm} R_f(x, x_0) \cdot (x - x_0) = D_\pm f(x_0) \cdot 0 = 0 \ .$$

(ii) Se f è convessa e $x_1 < x_2$, dalla Proposizione 7.46–(ii) segue che per ogni x e y in (x_1, x_2) si ha

$$R_f(x, x_1) \leq R_f(x_2, x_1) = R_f(x_1, x_2) \leq R_f(y, x_2) \ ,$$

e, per l'osservazione (i), prendendo il limite per $x \to x_1+$, e $y \to x_2-$, segue che

$$D_+ f(x_1) \leq R_f(x_1, x_2) \leq D_- f(x_2) \ , \qquad \forall x_1 < x_2 \ . \tag{7.84}$$

[24] Se x_0 è interno ad I esistono punti di I $x_1 < x_0 < x_2$ e quindi $R_f(x_1, x_0) \leq R_f(x, x_0) \leq R_f(x_1, x_0)$ per ogni $x \in (x_1, x_2)$; quindi i limiti da destra e da sinistra per $x \to x_0$ (che esistono per la monotonia di $R_f(\cdot, x_0)$) sono finiti. Negli estremi tali limiti potrebbero essere infiniti: ad esempio $f(x) = -\sqrt{x}$ è convessa in $[0, \infty)$ ma $\lim_{x \to 0+} R_f(x, 0) = -1/\sqrt{x} = -\infty$.

[25] Si ricordi (Esercizio 7.12) che una funzione convessa può non essere continua negli eventuali estremi di I.

(iii) Se nelle disuguaglianze (7.84) poniamo $x_1 = x_0$ e $x_2 = x$ nella prima e $x_2 = x_0$ e $x_1 = x$ nella seconda otteniamo:

per una funzione convessa valgono sempre le seguenti relazioni[26]

$$\begin{aligned} f(x) &\geq f(x_0) + D_+ f(x_0)\ (x - x_0)\ , &\quad \forall\ x > x_0\ , \\ f(x) &\geq f(x_0) + D_- f(x_0)\ (x - x_0)\ , &\quad \forall\ x < x_0\ . \end{aligned} \tag{7.85}$$

(iv) Da quest'ultima osservazione segue che se f è convessa e se $D_- f(x_0) \leq m \leq D_+ f(x_0)$ si ha[27]

$$f(x) \geq f(x_0) + m \cdot (x - x_0)\ , \qquad \forall\ x. \tag{7.86}$$

Una retta $f(x_0) + m \cdot (x - x_0)$ tale che valga (7.86) si dice *retta d'appoggio* in x_0 al grafico di f. Quindi:

Se f è convessa, allora per ogni numero m tale che $D_- f(x_0) \leq m \leq D_+ f(x_0)$, la retta $y = f(x_0) + m \cdot (x - x_0)$ è una retta d'appoggio in x_0 al grafico di f.

Ad esempio, qualunque retta mx con $m \in [-1, 1]$ è una retta d'appoggio al grafico di $|x|$ in $x_0 = 0$.

(v) Vale anche il viceversa dell'affermazione in (iv), ossia:

Se per ogni $x_0 \in I$ esiste una retta d'appoggio al grafico di f, allora f è convessa in I.

Dimostrazione Siano $x_1 < x_0 < x_2$ punti di I. Ponendo $x = x_1$ nella (7.86) si ha

$$m \cdot (x_0 - x_1) \geq f(x_0) - f(x_1) \qquad \Longleftrightarrow \qquad R_f(x_0, x_1) \leq m\ . \tag{7.87}$$

Ponendo, ora, $x = x_2$ nella (7.86) si ha che

$$f(x_2) - f(x_0) \geq m \cdot (x_2 - x_0) \qquad \Longleftrightarrow \qquad R_f(x_2, x_0) \geq m\ ,$$

che assieme a (7.87) mostra che $R_f(x_1, x_0) = R_f(x_0, x_1) \leq R_f(x_2, x_0)$; l'asserto segue quindi dalla Proposizione 7.46–(iii). ∎

Mettendo assieme le osservazioni (iv) e (v) appena fatte si ha, dunque, la seguente ulteriore caratterizzazione delle funzioni convesse:

Proposizione 7.48 *f è convessa su I se e solo esiste una retta d'appoggio al grafico di f in ogni punto di I.*

7.2 Convessità e differenziabilità

Assumiamo ora che f sia differenziabile in I. In tal caso

$$D_- f(x) = D_+ f(x) = f'(x)\ , \qquad \forall\ x \in I\ . \tag{7.88}$$

Proposizione 7.49 *Sia f differenziabile su I. Allora, f è convessa su I se e solo se sono vere le seguenti affermazioni:*

(i) *f' è crescente su I;*

(ii) *$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)\ , \quad \forall\ x \in I$.*

---

[26]Si faccia attenzione che nella seconda disuguaglianza $(x - x_0) < 0$ e quindi, nel moltiplicare per $(x - x_0)$, la disuguaglianza cambia verso.

[27]Se $x > x_0$ si usi la prima disuguaglianza in (7.85), se $x < x_0$ si usi la seconda (osservando che, in tal caso, $D_- f(x_0)(x - x_0) \geq m(x - x_0)$.

Dimostrazione Se f è convessa, da (7.84) e (7.88) segue che f' è crescente. Viceversa, se f' è crescente e $x_1 < x_0 < x_2$ dal teorema del valor medio di Lagrange segue che esistono $x_1 < \xi_1 < x_0 < \xi_2 < x_2$ tali che

$$R_f^{(2)}(x_2, x_1, x_0) = \frac{f'(\xi_2) - f'(\xi_1)}{x_2 - x_1} \geq 0$$

e dunque, per la Proposizione 7.46–(i), f è convessa.

Se f è convessa, da (7.85) e (7.88) segue (ii). D'altra parte, se vale (ii) significa che la retta tangente al grafico di f è una retta d'appoggio e quindi f è convessa per la Proposizione 7.48. ∎

Osservazione 7.50 Geometricamente il punto (ii) della Proposizione 7.49 si può interpretare dicendo che le ordinate del grafico di una funzione differenziabile convessa è sempre al di sopra delle ordinate corrispondenti di una qualunque sua retta tangente

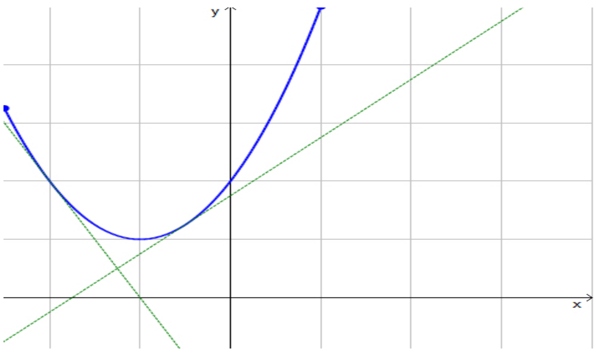

Figura 7.4: Convessità e tangenti

Infine, ricordando che una funzione differenziabile F è crescente se e solo se $F' \geq 0$, dalla Proposizione 7.49–(i), segue immediatamente la

Proposizione 7.51 *Sia f derivabile due volte su I. Allora f è convessa su I se e solo se $f'' \geq 0$ su I.*

7.3 Concavità

Definizione 7.52 *Una funzione f si dice concava su I se $-f$ è convessa su I.*

Dalle sezioni precenti è possibile riformulare i risultati corrispondenti per funzioni concave. Ad esempio f è concava su I se e solo se

$$f(x) \geq f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) \,, \qquad \forall\, x_1 < x < x_2 \,. \tag{7.89}$$

Esercizio 7.13 Riformulare e dimostrare tutti i risultati corrispondenti delle sezioni 1 e 2 per funzioni concave.

7.4 Stretta convessità/concavità

Definizione 7.53 *Una funzione f si dice strettamente convessa su I se vale la (7.79) con la disuguaglianza stretta o, equivalentemente se,*

$$f(x) < f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}\,(x - x_1)\ , \qquad \forall\ x_1 < x < x_2\ , \big(x_1, x_2 \in I\big). \tag{7.90}$$

Una funzione f si dice strettamente concava su I se $-f$ è strettamente convessa su I.

Da quanto visto seguono facilmente le seguenti proposizioni.

Proposizione 7.54 *f è strettamente convessa se e solo sono vere le seguenti affermazioni*
(i) $R_f^{(2)}(x_2, x_1, x_0) > 0$ *per ogni* $x_1 < x_0 < x_2$.
(ii) $x \to R_f(x, x_0)$ *è una funzione strettamente crescente in* $I \backslash \{x_0\}$.
(iii) $R_f(x_1, x_0) < R_f(x_2, x_0)$ *per ogni* $x_1 < x_0 < x_2$.

Proposizione 7.55 *Sia f differenziabile su I. Allora, f è strettamente convessa su I se e solo se sono vere le seguenti affermazioni:*
(i) *f' è strettamente crescente su I;*
(ii) $f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)\ , \quad \forall\ x \in I \backslash \{x_0\}$.

Proposizione 7.56 *Sia f derivabile due volte su I. Se $f'' > 0$ allora f è strettamente convessa.*

Osservazione 7.57 (i) *Se f è una funzione strettamente convessa su I allora, per ogni $c \in \mathbb{R}$, l'equazione $f(x) = c$ ha al più due soluzioni in I.*
Dimostrazione Se esistessero tre punti $x_1 < x_0 < x_2$ in I con $f(x_i) = c$ si avrebbe una contraddizione con (7.90) con $x = x_0$. ∎

Naturalmente, si possono avere tutti i casi: 2, 1 o nessuna soluzione: basti pensare al caso $f(x) = x^2$.
(ii) *Sia f è una funzione strettamente convessa su I. Se x_0 è un minimo relativo per f allora x_0 è un minimo globale stretto per f in I.*
In particolare, o f non ha minimo in[28] *I oppure f ha un unico minimo stretto globale in I.*
Dimostrazione La seconda affermazione è conseguenza immediata della prima. Dimostriamo la prima affermazione. Sia x_0 un minimo relativo per f su I e sia $y_0 = f(x_0)$. Allora esiste un intervallo $I_0 \subseteq I$ che contiene x_0 tale $f(x) \le y_0$ per ogni $x \in I_0$. Ora, supponiamo per assurdo, che esista un altro punto $\bar{x}_0 \in I$, $\bar{x}_0 \ne x_0$, tale che $\bar{y}_0 := f(\bar{x}_0) \le y_0$. Dalla stretta convessità segue che, per ogni $t \in (0, 1)$,

$$f(tx_0 + (1 - t)\bar{x}_0) < ty_0 + (1 - t)\bar{y}_0 \le ty_0 + (1 - t)y_0 = y_0$$

ma questo implica, per t arbitrariamente vicini a 1, vi sono punti x con $f(x) < y_0$ che contraddice il fatto che y_0 è un minimo locale. ∎

Esercizio 7.14 Dimostrare che $f(x) = x^4$ è strettamente convessa su $\mathbb{R}$ (e si noti che $f''(0) = 0$ e dunque che non vale, in generale, il viceversa della Proposizione 7.56).

Esercizio 7.15 Dimostrare che la funzione $f : I := [0, 1] \to \mathbb{R}$ che vale x^2 su $(0, 1]$ e $f(0) = 1$ è strettamente convessa su I (e discontinua in 0).

Esercizio 7.16 (i) Dimostrare le Proposizioni 7.54, 7.55 e 7.56.
(ii) Enunciare e dimostrare i risultati corrispondenti per funzioni strettamente concave.

[28] Come, ad esempio, $f(x) = e^x$ su $\mathbb{R}$.