9 Derivate di ordine superiore

9.1 Funzioni derivabili n volte

Definizione 7.64 *Sia $n \in \mathbb{N}$, I un intervallo o un insieme aperto e $f : I \to \mathbb{R}$.*
(i) *Si dice che f* **è derivabile n volte in** *I se esistono n funzioni $f_k : I \to \mathbb{R}$, con $1 \le k \le n$, tali che*

$$\begin{cases} f_1 = f' \\ f_{k+1} = f'_k \ , \qquad \forall 1 \le k \le n-1 \quad (\text{se } n > 1) \ . \end{cases} \tag{7.92}$$

In tal caso, le funzioni f_k si denotano con uno dei seguenti equivalenti simboli: $f^{(k)}$, $D^k f$, $\dfrac{d^k f}{dx^k}$ o[31] $\dfrac{d^k}{dx^k} f$; si pone anche $f^{(0)} := f$.
(ii) *Diciamo che f è derivabile n volte in $x_0 \in I$ se esiste un intorno U di x_0 tale che f è derivabile $(n-1)$–volte in $U \cap I$ e $f^{(n-1)}$ è derivabile in x_0; la derivata n–sima in x_0 si denota naturalmente $f^{(n)}(x_0)$ (o con uno dei simboli equivalenti sopra introdotti).*
(iii) *Si dice che f è di classe C^n su I se f è derivabile n volte su I e la derivata $f^{(n)}$ è continua su I. L'insieme delle funzioni di classe C^n su I si denota con $C^n(I)$. L'insieme delle funzioni $C^\infty(I)$ è data da $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} C^n(I)$ ossia è l'insieme delle funzioni derivabili un numero arbitrario di volte su I.*

Osservazione 7.65 (i) Con queste notazioni si ha che $f^{(1)} = f'$ e $f^{(2)} = f''$.
(ii) Se una funzione è derivabile n volte su I è di classe $C^{n-1}(I)$.
(iii) Dalla linearità della derivata segue immediatamente che $C^k(I)$ è uno spazio vettoriale su[32] $\mathbb{R}$.
(iv) Da tali definizione segue immediatamente che f è derivabile $n > 1$ volte in un punto se e solo se, per ogni $1 \le k \le n$, la funzione $f^{(k)}$ è derivabile $n - k$ volte.

Esempio 7.66 (i) Chiaramente i polinomi P sono $C^\infty(\mathbb{R})$ (se $n > \deg(P)$, $D^n P = 0$).
Se $k \in \mathbb{Z}_-$, x^k è $C^\infty(\mathbb{R}\backslash\{0\})$; se $k \in \mathbb{R}_-$, x^k è $C^\infty(\mathbb{R}_+)$: infatti (come è facile verificare per induzione su n)

$$D^n x^k = \Big(\prod_{j=0}^{n-1} (k-j) \Big) x^{k-n} \ . \tag{7.93}$$

Essendo $D \log|x| = 1/x$, da quanto detto segue che $\log|x| \in C^\infty(\{x \neq 0\})$.
Poiché $D^n e^x = e^x$ si ha che $e^x \in C^\infty(\mathbb{R})$ e questo implica immediatamente che anche $\operatorname{senh} x$ e $\cosh x$ sono $C^\infty(\mathbb{R})$. Analogamente essendo[33]

$$\begin{cases} D^{2n} \operatorname{sen} x = (-1)^n \operatorname{sen} x \\ D^{2n+1} \operatorname{sen} x = (-1)^n \cos x \end{cases} \qquad \begin{cases} D^{2n} \cos x = (-1)^n \cos x \\ D^{2n+1} \cos x = (-1)^{n+1} \operatorname{sen} x \end{cases} \tag{7.94}$$

si ha che $\operatorname{sen} x, \cos x \in C^\infty(\mathbb{R})$.

(ii) Un esempio di funzione $C^n(\mathbb{R})$ ma non $C^{n+1}(\mathbb{R})$ è dato da $f = x^n|x|$. Infatti, calcolando le derivate in $x > 0$ e $x < 0$ (ed usando l'Esercizio 7.8 per valutare la derivata in $x = 0$) si trova

$$D(x^n|x|) = \operatorname{sgn}(x)(n+1)x^n \ , \qquad D^n(x^n|x|) = (n+1)!|x| \ . \tag{7.95}$$

[31] Le ultime due sono le notazioni classiche di Leibnitz.
[32] Ossia, se $f, g \in C^n(I)$ e $a \in \mathbb{R}$ si ha che $af, f+g \in C^n(I)$.
[33] Verificare per induzione.

Quindi $f^{(n)}$ ha un punto angoloso in 0 (e non è ivi derivabile).
Non è difficile costruire esempi di funzioni C^{n-1}, derivabili n volte in un punto x_0 ma non derivabili n volte in alcun intervallo contenente x_0 (vedi Esercizio 7.23 qui sotto).

Proposizione 7.67 (i) *Siano f e g derivabili n volte in x_0. Allora fg è derivabile n volte in x_0.*
(ii) *Sia f derivabile n volte in x_0 e $f(x_0) \neq 0$. Allora $1/f$ è derivabile n volte in x_0.*
(iii) *Siano g e f derivabili n volte in, rispettivamente $y_0 = f(x_0)$ e x_0. Allora $g \circ f$ è derivabile n volte in x_0.*
(iv) *Sia f derivabile n volte in x_0 con $f'(x_0) \neq 0$ e iniettiva in un intorno di x_0. Allora la funzione inversa è derivabile n volte in $y_0 = f(x_0)$.*

Dimostrazione Per induzione su $n \geq 1$. Per $n = 1$ le affermazioni sono state dimostrate in § 2. Assumiamo (i)÷(iv) vere per $n-1 \geq 1$ e dimostriamole per n (usando le regole di derivazione del § 2).
(i): Per l'ipotesi induttiva $(fg)' = f'g + fg'$ è derivabile $(n-1)$, il che equivale a dire che fg è derivabile n volte.
(ii): Dal punto (i) e dall'ipotesi induttiva segue che $(1/f)' = -f'(f^2)^{-1}$ è derivabile $(n-1)$ volte e quindi $(1/f)$ è derivabile n volte.
(iii): Dal punto (i) e dall'ipotesi induttiva segue che $(g \circ f)' = g' \circ f \cdot f'$ è derivabile $(n-1)$ volte e quindi $g \circ f$ è derivabile n volte.
(iv): Denotiamo con $g(y) := f^{-1}(y)$ la funzione inversa di f. Poiché $g'(y_0) = \big((f' \circ g)(y_0)\big)^{-1}$, da (ii) e (iii) segue che g' è derivabile $n-1$ volte in y_0 ossia g è derivabile n volte. ∎

Osservazione 7.68 Dalla precedente proposizione segue immediatamente che *tutte* le funzioni elementari elencate nella Tavola di derivate in § 2 sono C^∞ sui rispettivi domini di definizione.

Esercizio 7.19 Siano f e g derivabili n volte in x_0. Dimostrare che in tale punto si ha

$$D^n(fg) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)} \ . \tag{7.96}$$

Esercizio 7.20 Sia f derivabile $n \geq 1$ volte in un punto in un intorno del quale $f \neq 0$. Dimostrare che valgono le seguenti formule ricorsive:

$$D^n\Big(\frac{1}{f}\Big) = \frac{F_n}{f^{n+1}} \ , \qquad F_n := \begin{cases} -f' & \text{se } n = 1 \\ fF'_{n-1} - nf'F_{n-1} & \text{se } n \geq 2 \end{cases} \ . \tag{7.97}$$

Esercizio 7.21 Sia g derivabile n volte in y_0 e f derivabile n volte in x_0 e $f(x_0) = y_0$. Dimostrare che valgono le seguenti formule ricorsive:

$$D^n(g \circ f) = \sum_{k=1}^{n} g^{(n+1-k)} \circ f \cdot F_{nk} \ , \tag{7.98}$$

dove le funzioni F_{nk} sono ricorsivamente definite in termini di F_{nk-1} come segue:

$$F_{n1} := (f')^n \ , \quad F_{nn} := f^{(n)} \ , \qquad F_{nk} := f'F_{n-1k} + F'_{n-1k-1} \quad (\forall 1 < k < n) \ . \tag{7.99}$$

Esercizio 7.22 Sia f derivabile $n \geq 2$ volte in x_0 con $f'(x_0) \neq 0$ e iniettiva in un intorno di x_0 e si denoti con $g := f^{-1}$ la funzione inversa di f.
(i) Dimostrare che le derivate $g^{(m)}$, per $2 \leq m \leq n$ sono ricorsivamente date dalle seguenti formule:

$$g^{(m)} = \frac{-\displaystyle\sum_{k=2}^{m} g^{(m+1-k)} \circ f \cdot F_{mk}}{(f')^m} \tag{7.100}$$

dove le F_{mk} sono definite in (7.99) (con n sostituito da m).
(ii) In particolare da (7.100) segue che

$$g'' \circ f = \frac{-f''}{(f')^3} \; . \tag{7.101}$$

Discutere la convessità/concavità di funzioni derivabili due volte e invertibili.

Esercizio 7.23 (Una funzione C^{n-1} derivabile n volte in 0 ma con derivata $(n-1)$–sima con infiniti punti angolosi in un qualunque intervallo contenente 0) Sia

$$\hat{\varphi}_n(x) := \begin{cases} (1-x)^n x^n & \text{se } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{se } x \in \{x \le 0\} \cup \{x \ge 1\} \end{cases} \; . \tag{7.102}$$

(i) Dimostrare che $(D^k \hat{\varphi}_n)(0+) = 0 = (D^k \hat{\varphi}_n)(1-)$ per ogni $k \le n-1$ e dedurne che $\hat{\varphi}_n \in C^{(n-1)}(\mathbb{R})$.
(ii) Dimostrare che $D^n \hat{\varphi}_n(0+) \ne 0 \ne D^k \hat{\varphi}_n(1-)$ e dedurne che $D^{(n-1)}\varphi_n$ ha due punti angolosi in 0 e 1.
(iii) Sia $\varphi_n := 4^n \hat{\varphi}_n$: dimostrare che $\varphi_n(1/2) = 1 = \max \varphi_n$.
(iv) Sia $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n := \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}$ e sia, infine

$$\psi_n(x) := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \varphi_n\Big(\frac{x - a_n}{b_n - a_n)}\Big) \; . \tag{7.103}$$

Dimostrare che: $\psi_n \in C^{n-1}(\mathbb{R})$; ψ_n è derivabile n volte in 0 e $D^n \psi_n(0) = 0$ ma che in ogni intervallo $(-\delta, \delta)$ vi sono infiniti punti spigolosi di $D^{n-1}\psi_n$.

Esercizio 7.24 Sia

$$\varphi(x) := \begin{cases} e^{-1/x} & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x \le 0 \end{cases} \; . \tag{7.104}$$

(i) Dimostrare che $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$.
(ii) Studiare il grafico di φ.

Suggerimento: Per il punto (i), dimostrare induttivamente che per $x > 0$, $\varphi^{(n)}(x) = \varphi(x) \cdot P_n(1/x)$ con $P_n(y)$ polinomio monico di grado $2n$ definito ricorsivamente da: $P_1(y) = y^2$ e, per $n > 1$, $P_n = y^2(P_n - P'_{n-1})$.