

AM210 - Analisi Matematica 3

DOCENTE: MICHELA PROCESI

TUTORI: DAVIDE CIACCIA, ELIA ONOFRI

Tutorato 3

15 novembre 2018

Esercizio 1. Scrivere lo sviluppo di Taylor (fino al quarto ordine) attorno all'origine delle seguenti funzioni:

(a) $f(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$

(b) $f(x, y) = xye^{x^2+y^2}$

Esercizio 2. Calcolare i seguenti limiti utilizzando gli sviluppi di Taylor:

(a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{e^{x+y} - 1 - x - xy - y}{\pi(x^2 + y^2)}$

(b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\log(1 + x + y + xy) - x - y}{x^2 + y^2}$

Esercizio 3. Dimostrare che tutte le norme su \mathbb{R}^n sono equivalenti.

Esercizio 4. Dimostrare che la seguente è una metrica:

$$d(x, y) = |\tanh(x) - \tanh(y)|$$

Esercizio 5. Dimostrare che se $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ sono due norme equivalenti allora:

$$\|\cdot\|_1 \text{ è di Banach} \Leftrightarrow \|\cdot\|_2 \text{ è di Banach}$$

Esercizio 6. Date le funzioni:

$$l(t) := (t, t^2)$$

$$m(x, y) := (x, -y)$$

$$n(x, y) := x + 2y$$

calcolare

$$\frac{d}{dt}(n \circ m \circ l)(t)$$

e verificare che

$$\frac{d}{dt}(n \circ m \circ l)(t) = \nabla n[(m \circ l)(t)] J_m[l(t)] l'(t)$$

Ricordiamo che con J_λ si indica la matrice jacobiana di λ , e che per funzioni $\mu : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $\xi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ ($\xi(t) = (\xi_1(t), \dots, \xi_m(t))$), scriviamo rispettivamente:

$$\nabla \mu(x) := J_\mu(x) = (\partial_{x_1} \mu(x), \dots, \partial_{x_n} \mu(x)),$$

$$\xi'(t) := J_\xi(t) = \begin{pmatrix} \xi'_1(t) \\ \vdots \\ \xi'_m(t) \end{pmatrix}.$$