Corso di Laurea in Matematica - Anno Accademico 2018/2019

AM210 - Analisi Matematica 3

Docente: Michela Procesi
Tutori: Davide Ciaccia, Elia Onofri

Tutorato 4
22 novembre 2018

Esercizio 1. Dimostrare che esiste un'unica funzione continua $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ tale che

$$f(x) = \frac{1}{2}\sin\left(f(x)\right)$$

Esercizio 2. Data la funzione

$$f(x,y) = (1-x+y)e^x + e^y + \frac{1}{2}$$

(a) Studiare l'insieme $L := \{(x,y) | f(x,y) = 0\}$.

(b) Dimostrare che esiste $x_0 > -1$ tale che
$$\begin{cases} f(x,0) < 0 & \text{se } x > x_0 \\ f(x,0) > 0 & \text{se } x < x_0 \end{cases}$$

(c) Usando (b) ed il teorema del valore intermedio, dimostrare che
$$\begin{cases} y(x) > 0 & \text{se } x > x_0 \\ y(x) < 0 & \text{se } x < x_0 \end{cases}$$

(d) Dimostrare che
$$\begin{cases} y'(x) \leq 0 & \text{se } y(x) \geq x \\ y'(x) \geq 0 & \text{se } y(x) \leq x \end{cases}$$

(e) Dimostrare che $y(x) = x \Longleftrightarrow x = \log(\frac{1}{4})$.

(f) Dimostrare che
$$\begin{cases} f(x,x) > 0 & \text{se } x > \log(\frac{1}{4}) \\ f(x,x) < 0 & \text{se } x < \log(\frac{1}{4}) \end{cases}$$
e dedurre che
$$\begin{cases} y(x) < x & \text{se } x > \log(\frac{1}{4}) \\ y(x) > x & \text{se } x < \log(\frac{1}{4}) \end{cases}$$

Esercizio 3.

(a) Provare che per ogni matrice reale A di dimensione $n \times n$ si ha che $\|A\| \geq max\{|\lambda_i|\}$, dove $\lambda_1, ...\lambda_n$ sono gli autovalori di A.

(b) Provare che se $A = \text{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ allora $\|A\| = max\{|\lambda_i|\}$.

(c) Provare che se U è una matrice ortogonale allora $\|U\| = 1$.

(d) Provare che se A è una matrice reale e simmetrica allora $\|A\| = max\{|\lambda_i|\}$.

Esercizio 4. Calcolare la norma operatoriale delle seguenti matrici.

(a) $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ (b) $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Definizione Sia A una matrice di dimensione $n \times n$ a coefficienti complessi. L'esponenziale di A è dato da

$$e^A := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!}$$

dove $A^n = A \circ ... \circ A$ (n volte).

Esercizio 5. Data una matrice A di dimensione $n \times n$, calcolare e^A nel caso in cui:

(a) $A = \text{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$

(b) A è diagonalizzabile, cioè esiste una matrice M di dimensione $n \times n$, invertibile, tale che

$$M^{-1}AM = \text{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$$

Nota Si ricordano inoltre le seguenti proprietà:

- Se A e B commutano, allora $e^{A+B} = e^A e^B$.
- Se uno degli autovalori λ di A ha molteplicità geometrica maggiore di quella algebrica (e quindi A non è diagonalizzabile nemmeno in campo complesso, la matrice $N := A - \lambda I$ è nilpotente, cioè esiste un k per cui si ha che $N^k = 0$. Allora $e^A = e^{\lambda I + N} = e^\lambda I e^N$, con e^N calcolabile direttamente mediante la definizione.

Esercizio 6. Calcolare l'esponenziale delle seguenti matrici.

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(c) $C = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ $(a, b \in \mathbb{R})$

(d) $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -c^2 & 0 \end{pmatrix}$ $(c > 0)$

(e) $E = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$

Suggerimento: come alternativa alla diagonalizzazione del punto (c), potrebbe essere utile osservare che $C = aI + \Sigma$, dove $\Sigma = ...$; per il punto (d) potrebbe essere utile calcolare D^2.