Primo Esonero di AM210 -Analisi II
10-11-2020

Ogni risposta va accuratamente motivata. Si possono usare: libri, appunti, e dispense, NON si possono usare congegni elettronici, etc.

1. Risolvere UNO SOLO fra gli esercizi 1.a ed 1.b.

1.a Trovare tutti i punti in cui è continua/differenziabile la funzione

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{\cos(x^2-y^2)-1}{(x^2+y^2)^{3/2}} & \textit{se } (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & \textit{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1.b Trovare tutti i punti in cui è continua/differenziabile la funzione

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{(x^4+y^2)} & \textit{se } (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & \textit{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

2. Si studi la continuità della funzione

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{x^8y}{(x^2+y^3)} & \textit{se } x^2 \neq y^3 \\ \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

nel punto $(0,0)$.

Extra: Si calcoli la derivata di f lungo la curva $\phi : [-1,1] \to \mathbb{R}^2$, $\phi(t) = (t,t^2)$ all'istante $t=0$ (cioè si calcoli $\frac{d}{dt}f(\phi(t))|_{t=0}$).

3. Si studino e si classifichino i punti critici della funzione

$$f(x,y) = x(y^3-y^2)$$

Extra: fare un grafico qualitativo della funzione vicino al punto critico non-degenere.

Esercizio 1.a f è differenziabile in $\mathbb{R}^2 / \{(0,0)\}$.

la funzione $t \to g(t) := \begin{cases} \dfrac{\cos(t)-1}{t^2} & \text{se } t \neq 0 \\ -\dfrac{1}{2} & \text{se } t = 0 \end{cases}$

é C^∞ quindi $g(x^2-y^2)$ è a sua volta C^∞. in particolare è differenziabile.

Ora $f(x,y) = g(x^2-y^2) \cdot h(x,y)$

dove $h(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x^2-y^2)^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Studio la regolarità di $h(x,y)$.

$h(x,y)$ è differenziabile (in effetti C^∞) in $\mathbb{R}^2 / \{(0,0)\}$ ed è omogenea di grado $\alpha = 1$.

Quindi è continua ma NON è differenziabile.

Es. 1.b la funzione è C^1 (in effetti C^∞) in $\mathbb{R}^2 / \{(0,0)\}$

dato che
$$0 \le \frac{x^2 y^2}{x^4 + y^2} \le x^2$$

la funzione è continua in $(0,0)$

dato che $f(x,0) = f(0,y) = 0$

le derivate parziali in $(0,0)$ sono entrambe nulle.

Per verificare la differenziabilità studio

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y^2}{(x^4+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

infatti
$$0 \le \frac{y^2}{x^4+y^2} \frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot |x| \le \underbrace{|x|}_{\downarrow 0} \qquad \square$$

Esercizio 2.

2. Si studi la continuità della funzione

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{x^8 y}{(x^2 \text{ [redacted] } y^3)} & se\ x^2 \neq y^3 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

nel punto $(0,0)$.

Extra: Si calcoli la derivata di f lungo la curva $\phi : [-1,1] \to \mathbb{R}^2$, $\phi(t) = (t, t^2)$ all'istante $t = 0$ (cioè si calcoli $\frac{d}{dt} f(\phi(t))|_{t=0}$).

Il denominatore si annulla sulla curva $x^2 = y^3$ quindi considero $t \to \varphi(t)$

$$\varphi : \begin{cases} x = t + t^{100} \\ y = t^{\frac{2}{3}} \end{cases}$$

$$f(\varphi(t)) = \frac{(t + t^{100})^8 \, t^{\frac{2}{3}}}{t^2 + 2t^{101} + t^{1000} - t^2}$$

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{t^{8+\frac{2}{3}} (1 + t^{99})^8}{2t^{101} + t^{1000}} = +\infty$$

La funzione NON è continua.

Extra: $f(\phi(t)) = \dfrac{t^{10}}{t^2 - t^6} = \dfrac{t^8}{1-t^4}$

$$\left.\frac{d}{dt} f(\phi(t))\right|_{t=0} = 0 .$$

Esercizio 3

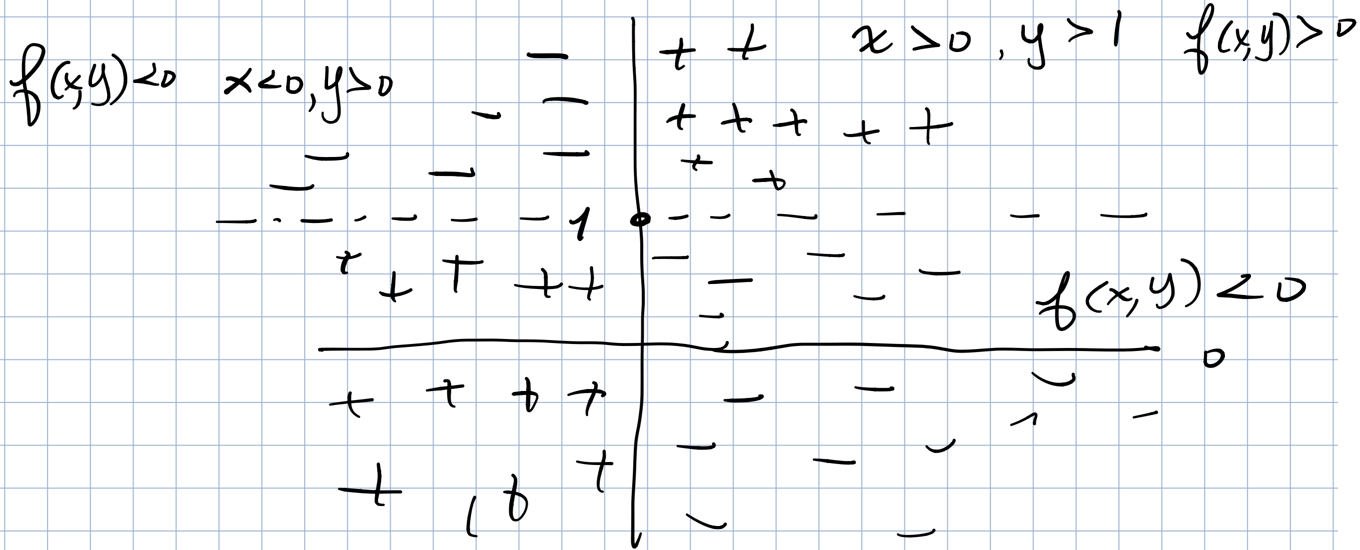
3. Si studino e si classifichino i punti critici della funzione

$$f(x, y) = x(y^3 - y^2)$$

Extra: fare un grafico qualitativo della funzione vicino al punto critico non-degenere.

$$f(x,y) = x\, y^2 (y-1)$$

Studio il segno della funzione.



quindi tutti i punti $(x_0,0)$ con $x_0 > 0$

sono punti di massimo (NON stretto)

e tutti i punti $(x_0,0)$ con $x_0 < 0$ sono

punti di minimo (NON stretto)

[SONO SICURAMENTE punti critici]

Vado a studiare il gradiente

$$\nabla f = \begin{pmatrix} y^2(y-1) \\ x(3y^2-2y) \end{pmatrix}$$

$$\nabla f = 0 \quad \begin{cases} y^2(y-1) = 0 \\ x(3y^2-2y) = 0 \end{cases}$$

(1) $y=0$, x qualsiasi

(2) $y=1$, $x=0$

quindi come visto prima dallo studio del

segno $(x_0,0)$ è MAX se $x_0 > 0$

$(x_0, 0)$ è MIN se $x_0 < 0$ è una sella se $x_0 = 0$. (studio del segno)

Il punto $(0,1)$ è una sella.

Calcolo l'Hessiano $H = \begin{pmatrix} 0 & 3y^2-2y \\ 3y^2-2y & x(6y-2) \end{pmatrix}$

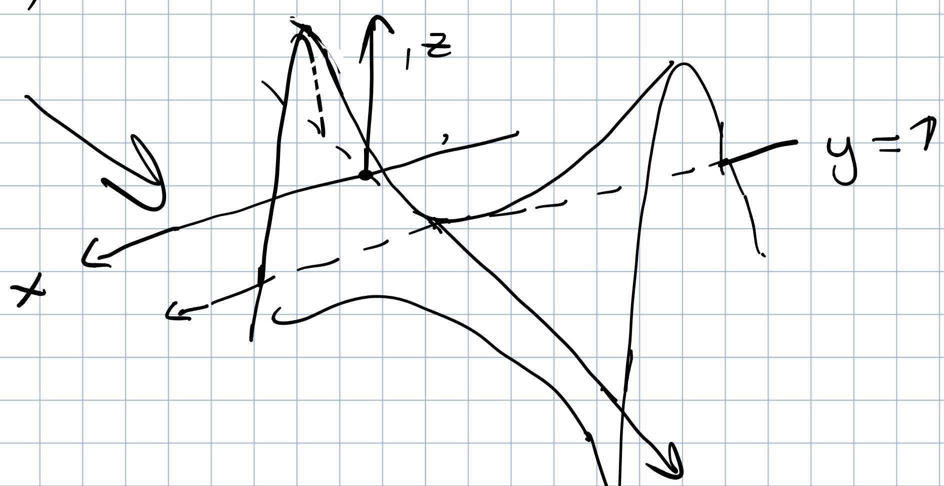
in $(0,1)$ $\quad H = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\det = -1 \Rightarrow$ autovalori di segno opposto

$\Rightarrow$ una sella $\quad \lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = -1$

$$f(x,y) \simeq \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x \\ y-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y-1 \end{pmatrix} + o\left(x^2 + (y-1)^2\right)$$

$$= x(y-1) + o\left(x^2 + (y-1)^2\right)$$



y