

AM220 - Analisi Matematica 4

DOCENTE: MICHELA PROCESI

TUTORI: DANIELE SALIERNO, JACOPO TENAN

Tutorato IV

Esercizio 1. Si dica se le seguenti forme differenziali sono chiuse e/o esatte e, per quelle esatte, calcolare una primitiva.

(a) $\omega(x, y) = e^{-y^2} dx + (1 - 2xye^{-y^2}) dy$

(b) $\omega(x, y) = 3xy dx + (x + 2y) dy$

(c) $\omega(x, y, z) = (3x^2 + y) dx + x dy + 2z dz$

Esercizio 2. Calcolare gli integrali delle seguenti forme differenziali sulle curve indicate.

(a) $\omega(x, y) = x dy$ $\gamma = \partial B((x_0, y_0), r)$

(b) $\omega(x, y) = \frac{dx}{x+3} + 2y dy$ $\gamma = \partial([-2, 0] \times [0, 2])$

(c) $\omega(x, y) = (xy^2 - 2xy) dx + (3x^2 + 2y^2) dy$ $\gamma = \partial(B(0, 1) \cap \{y \geq 0\})$

(d) $\omega(x, y) = 2x(x + y) dx + 2y(x + y) dy$ $\gamma(t) = \begin{pmatrix} rt \cos t \\ rt \sin t \end{pmatrix} \quad \gamma : [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}^2$

Esercizio 3. Considerare la forma differenziale

$$\omega(x, y) = \left(\log(x + y) + \frac{x}{x+y} - \frac{x}{x+y} \right)$$

sul dominio $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y > 0\}$.

Riscrivere la forma differenziale con il cambiamento di variabile

$$\varphi(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{u+v}{2} \\ \frac{u-v}{2} \end{pmatrix}$$

e dire se ω è esatta e, in caso affermativo, se ne calcoli un potenziale.

Esercizio 4. Dati il campo vettoriale $F(x, y, z) = (x^2, y^2, z)^T$ e il dominio

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < z < 1\}$$

verificare la validità del teorema della divergenza.

Esercizio 5. Siano $v(x, y) = \log(\sqrt{x^2 + y^2})$ il potenziale elettrico, definito su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ e A un aperto connesso limitato tale che $(0, 0) \in A$.

Calcolare il flusso uscente da ∂A del campo generato dal potenziale elettrico.

Esercizio 6. Calcolare il flusso del campo $F(x, y, z) = (0, yz, x)^T$ attraverso ∂V , dove

$$V := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z^2, z \geq 0, x^2 + y^2 + z^2 \leq 2y\}$$