Una successione è una legge

$$\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$n \longrightarrow a_n$$

per esempio $a_n = \frac{1}{n}$

DEFINIZIONE — *Un numero reale* a *è il limite della successione* a_n *(si dice anche che* a_n *tende o converge ad* a*), e si scrive*

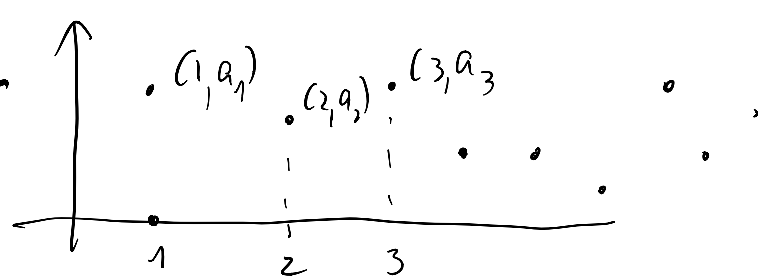
(17.7) $$\lim_{n \to +\infty} a_n = a \qquad (\textit{oppure} \qquad a_n \to a),$$

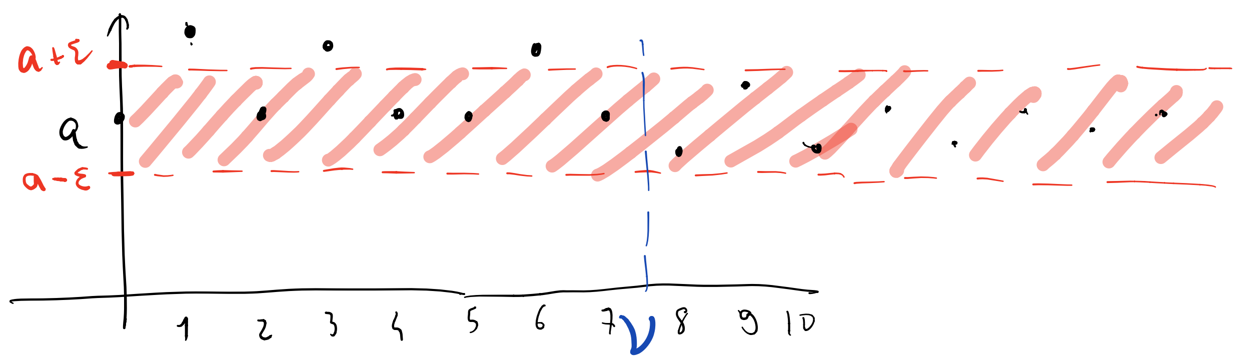
se, qualunque sia $\varepsilon > 0$, *esiste un numero* ν *tale che* $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$ *per ogni* $n > \nu$.

La relazione $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$ si può anche scrivere $-\varepsilon < a_n - a < \varepsilon$, e ciò equivale a (proprietà (8.12)):

(17.8) $$|a_n - a| < \varepsilon.$$

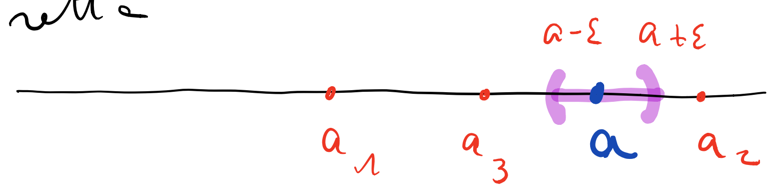
Se riporto la successione su un grafico con dominio $\mathbb{N}$





per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\nu \in \mathbb{R}$ tale che $|a_n - a| < \varepsilon$ (sono nella striscia tratteggiata) per tutti gli $n > \nu$

sulla retta



tutti gli a_k con k sufficientemente grande sono dentro a $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$

Esempio:

$$a_n = \frac{1}{n} \qquad \lim_{n \to \infty} a_n = 0$$

infatti fissato $\varepsilon > 0$ pongo $\nu = \frac{1}{\varepsilon}$

infatti se $n > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon$

quindi $|a_n - a| = |\frac{1}{n} - 0| = \frac{1}{n} < \varepsilon$

se $n > \nu = \frac{1}{\varepsilon}$

Esempio 2. $a_n = \frac{(-1)^n}{n^2}$

Dimostrare che $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$

Dato $\varepsilon > 0$ bisogna calcolare ν (funzione di epsilon)

in modo che se $n > \nu$

$|a_n - a| = |\frac{(-1)^n}{n^2} - 0| = \frac{1}{n^2} < \varepsilon$

(Risp. $\nu = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$!)

Definizione

① $\lim_{n \to \infty} a_n = +\infty$

se $\forall M > 0$ $\exists \nu$ tale che se $n > \nu$

allora $a_n > M$

② $\lim_{n \to \infty} a_n = -\infty$ se $\forall M < 0$ $\exists \nu$

tale che se $n > \nu$ allora $a_n < M$

Per esempio se $a_n = n^2$

$\lim_{n \to \infty} a_n = +\infty$ infatti se pongo

$\nu(M) = \sqrt{M}$ se $n > \nu \Rightarrow n^2 > M$

$$\begin{array}{c} n^2 > M \\ \shortparallel \\ a_n > M \end{array} \quad \boxtimes$$

Non è detto che esista sempre il limite di una successione

per esempio

$$a_n = (-1)^n \qquad \text{e} \qquad a_n = \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)$$

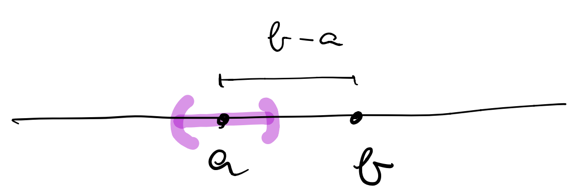
NON hanno limite

Unicità del Limite

Sia a_n una successione e $a \neq b$ due numeri reali

se $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ allora NON può valere $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = b$

prendo $\varepsilon < \frac{b-a}{2}$

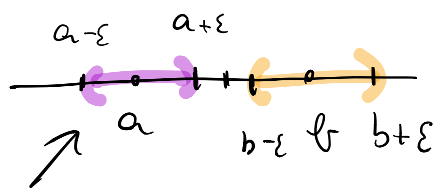


so che tutti gli a_n con $n > \nu(\varepsilon)$

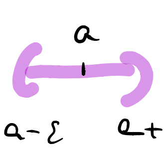
sono dentro all'intervallo $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$

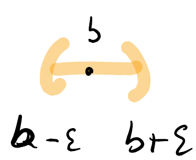
questo vuol dire che nel corrispondente intervallo $(b-\varepsilon, b+\varepsilon)$ NON CADE nessun a_n con $n > \nu(\varepsilon)$

(infatti $(b-\varepsilon, b+\varepsilon) \cap (a-\varepsilon, a+\varepsilon) = \emptyset$)



(tutti gli a_n con $n > \nu$ sono nell'intervallo viola) quindi NON possono essere in quello arancione

N.B. ho scelto $\varepsilon < \frac{b-a}{2}$ per essere sicura che 

e 

siano DISGIUNTI

Quindi se $\varepsilon < \frac{b-a}{2}$ nell' intervallo $(b-\varepsilon, b+\varepsilon)$ cadono solo un numero finito di elementi della successione a_n

e pertanto $\lim_{n \to \infty} a_n \neq b$

Esercizio

Dimostrare che se pongo $a_n = n^2 - n$

$\lim_{n \to \infty} a_n \neq 1$

Se $n > 2$ $\quad n^2 - n = n(n-1) > n \cdot 1$

quindi se $n > 2$ $\quad n^2 - n > n > 2$

$$\Downarrow$$

$$a_n > 2$$

quindi se prendo $\varepsilon = \frac{1}{2}$

NOTO che $a_n \notin (1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$ se $n > 2$

infatti $a_n > 2$ quindi non è nell' intervallo $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$!

IL LIMITE NON è $= 1$.

[Nota in effetti $\lim_{n \to \infty} n^2 - n = +\infty$!
infatti
Dato $M > 0$ se $n > M+1$ si ha che

$$\left\{\begin{matrix} n-1 > M \\ e \\ n > 1 \end{matrix}\right\} \text{ quindi } n(n-1) > nM > M$$
]

OPERAZIONI CON I LIMITI. — *Se* $\lim_{n \to +\infty} a_n = a$ *e* $\lim_{n \to +\infty} b_n = b$, *con* $a, b \in \mathbf{R}$, *si ha*

(19.1) $$\lim_{n \to +\infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b.$$

(19.2) $$\lim_{n \to +\infty} a_n \cdot b_n = ab.$$

(19.3) $$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b} \quad (\textit{se } b_n, b \neq 0).$$