Rem: $\lim_{n \to \infty} a_n = a$

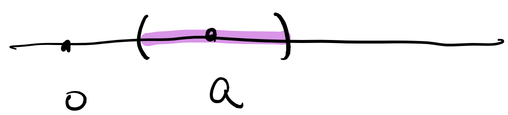
vuol dire che per ogni $\varepsilon > 0$ l'intervallo $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ contiene tutti gli elementi della successione tranne al più un numero finito.

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \nu(\varepsilon)$ t.c. per ogni $n > \nu(\varepsilon)$ si ha $|a - a_n| < \varepsilon$

Proposizione: se $\lim_{n \to \infty} a_n = a > 0$ allora $\exists N \in \mathbb{R}$. tale che se $n > N$ allora $a_n > 0$

In altre parole se una successione ha come limite un numero strettamente positivo allora per n sufficientemente grande tutti gli a_n devono essere strettamente positivi

Dim. uso la definizione di limite con $\varepsilon = \frac{a}{2}$



e prendo $N = \nu\left(\frac{a}{2}\right)$ in questo modo tutti gli a_n con $n > N$ sono in $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ cioè $a_n > a - \varepsilon = \frac{a}{2}$

quindi in particolare sono positivi.

In altre parole: tutti gli a_n tranne un # finito sono nell'intervallo rosa e quindi sono positivi

ALLO STESSO MODO se

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a < 0 \quad \text{allora}$$

$\exists N$ tale che $a_n < 0 \quad \forall \; n > N$.

CorollARI

Prop. se $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$

e $a_n \geq 0$ allora $a \geq 0$

Per ASSURDO:

Infatti se fosse $a < 0$ per

si avrebbe $a_n < 0$ per n sufficientemente grande e questo contraddice l'ipotesi.

Altra conseguenza se

$\{c_n\}$ e $\{b_n\}$ sono 2 successioni

con $\lim c_n = c$ e $\lim b_n = b$

$n \to \infty$ $\qquad\qquad$ $n \to \infty$

se $\quad b_n \geq c_n \quad$ allora $\quad b \geq c$

viceversa se $\quad b > c \quad$ (NOTARE il maggiore stretto)

allora per tutti gli n sufficientemente grandi $\quad b_n > c_n$

Dim. basta applicare il teorema precedente con $\quad a_n = b_n - c_n$

Questi si chiamano teoremi di confronto o "permanenza del segno"

Teorema dei Carabinieri

Se ho tre successioni $\{m_n\}, \{a_n\}, \{M_n\}$ tali che

1. $\exists N$ e per ogni $n > N$

$$m_n \leq a_n \leq M_n$$

② $\lim_{n \to \infty} m_n = \lim_{n \to \infty} M_n = m$

allora $\lim_{n \to \infty} a_n = m$

dato $\varepsilon > 0$ so che (dato che $m_n \to m$ e $M_n \to m$)

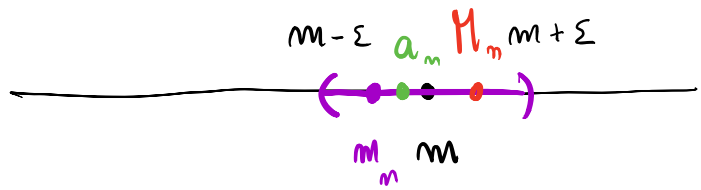
se $n > \nu_1(\varepsilon)$ allora $-\varepsilon < m_n - m < \varepsilon$

se $n > \nu_2(\varepsilon)$ allora $-\varepsilon < M_n - m < \varepsilon$

ma se $n > \max(\nu_1, \nu_2, N)$

dato che $m_n < a_n < M_n$

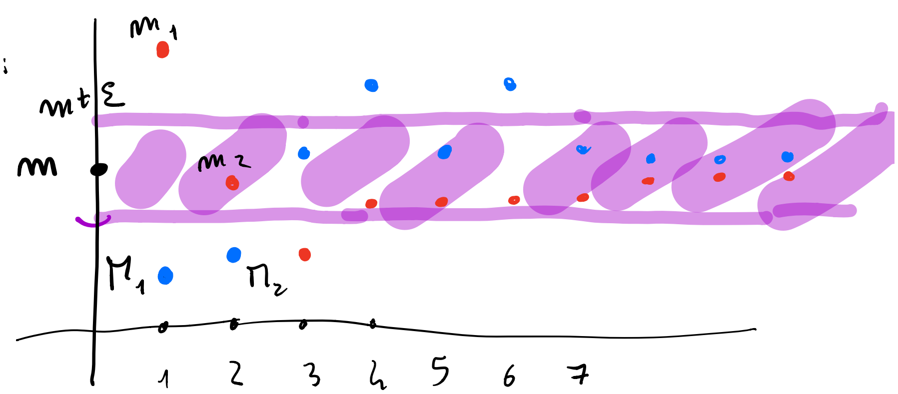
$$-\varepsilon < m_n - m < a_n - m < M_n - m < \varepsilon$$



graficamente 1:

per n sufficientemente grande sia M_n che m_n sono nel segmento viola ma allora tutti i punti compresi fra m_n e M_n sono nel segmento viola ora dato che se n è grande $m_n < a_n < M_n$ è compreso fra m_n e M_n; a_n è nel segmento viola.

Graficamente 2:



In rosso m_n

In blu M_n

in questo disegno $N = 2$ infatti

a partire da $n = 3$ vale $M_n \geq m_n$

se $(m-\varepsilon, m+\varepsilon)$ è in viola allora

$\nu_1(\varepsilon) = 3$ e $\nu_2(\varepsilon) = 6$

per $n > 6$, a_n (che si trova fra

M_n e m_n) sta nell'intervallo

$(m-\varepsilon, m+\varepsilon)$

(Nel grafico la regione in viola)

Corollario:

se $a_n \leq b_n$ per $n \geq N$ e

$a_n \to +\infty$ allora $b_n \to +\infty$

VICEVERSA se $b_n \to -\infty \Rightarrow a_n \to -\infty$.

Dimostrazione $a_n \to +\infty$ vuol dire che per ogni valore $M>0$ (comunque grande) $a_n > M$ per tutti gli $n > \nu(M)$.

ma dato che $b_n \geq a_n$ se $n > N$ allora per tutti gli $n > \max(\nu(M), N)$ si ha che

$$b_n \geq a_n > M \quad \text{quindi} \quad b_n \to \infty$$

$\boxtimes$

Per esempio

$$n^2 - n \geq n \qquad \text{se} \quad n \geq 2$$

quindi $n^2 - n \to \infty$

(si vede anche NOTANDO che

$$n^2 - n = n^2\left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

quindi

$$\lim n^2\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \infty \cdot 1 = \infty$$

Aritmetica della RETTA ESTESA.

(20.1)	$a_n \to a$,	$b_n \to \pm\infty$	$\Rightarrow$	$a_n + b_n \to \pm\infty$
(20.2)	$a_n \to \pm\infty$,	$b_n \to \pm\infty$	$\Rightarrow$	$a_n + b_n \to \pm\infty$
(20.3)	$a_n \to a \neq 0$,	$b_n \to \pm\infty$	$\Rightarrow$	$\lvert a_n\, b_n \rvert \to +\infty$
(20.4)	$a_n \to \pm\infty$,	$b_n \to \pm\infty$	$\Rightarrow$	$\lvert a_n\, b_n \rvert \to +\infty$
(20.5)	$a_n \to a$,	$b_n \to \pm\infty$	$\Rightarrow$	$a_n / b_n \to 0$
(20.6)	$a_n \to a$,	$b_n \to \pm\infty$	$\Rightarrow$	$\lvert b_n / a_n \rvert \to +\infty$
$\boxed{(20.7)}$	$a_n \to a \neq 0$,	$b_n \to 0$	$\Rightarrow$	$\lvert a_n / b_n \rvert \to +\infty$

Schematicamente si scrive

① $\boxed{a} + \boxed{\infty} = +\infty$; $a - \infty = -\infty$

② $\infty + \infty = +\infty$

③ se $a > 0 \Rightarrow a \cdot \infty = +\infty$ $\quad a \cdot (-\infty)$

se $a < 0 \Rightarrow a \cdot \infty = -\infty$ $\quad a \cdot (-\infty) =$

④ $(+\infty)\cdot(+\infty) = (-\infty)\cdot(-\infty) = +\infty$

$(+\infty)\cdot(-\infty) = -\infty$ $\qquad \frac{1}{0^+} = +\infty$

⑤ $a/\infty = \frac{a}{-\infty} = 0$

⑥ è ovvio

⑦ se $a > 0$

$\infty - \infty$ = indet.

nel senso che dipende da a_n, b_n

$a_n \to a$; $b_n \to 0$

in $\frac{a_n}{b_n}$ non so se ha limite

$$\left| \frac{a_n}{b_n} \right| \longrightarrow \frac{|a|}{|0|} \to +\infty$$

$c_n \to 0^+$ se $c_n \to 0$ e $c_n > 0$ $n > N$

$c_n = \frac{1}{|b_n|}$ $c_n \longrightarrow 0^+$

$$\frac{1}{0^+} = +\infty$$