Dico che $a_n \to 0^+$ se

$a_n \to 0$ e $a_n \geq 0$ per ogni $n > N$

dico che $a_n \to 0^-$ se $a_n \to 0$ e

$a_n \leq 0$ per ogni $n > N$

Nota bene: una successione può tendere a zero ed oscillare

per esempio $a_n = \frac{(-1)^n}{n} \to 0$

ma non è NÉ definitivamente > 0 NÉ definitivamente < 0.

Aritmetica della retta estesa

$\frac{1}{0^+} = +\infty$, $\frac{1}{0^-} = -\infty$

cune prop. sulle successioni

PROPOSIZIONE. — a_n *converge a zero se e soltanto se* $|a_n|$ *converge a zero.*

$a_n \to 0$ se e solo se $|a_n| \to 0^+$

Ricordiamo che una successione a_n è *limitata* se esiste un numero $M > 0$ tale che

$$|a_n| \le M, \qquad \forall\, n \in \mathbf{N}. \tag{22.3}$$

Ricordiamo inoltre che una successione che converge a zero si dice *infinitesima*.

TEOREMA DEL LIMITE DEL PRODOTTO DI UNA SUCCESSIONE LIMITATA PER UNA INFINITESIMA. — *Se a_n è una successione limitata e b_n è una successione che converge a zero; allora la successione prodotto $a_n \cdot b_n$ converge a zero.*

$|a_n| \le M$ (limitata)

$b_n \to 0 \iff |b_n| \to 0^+$

$$\underset{\downarrow \atop 0}{0} \le |a_n b_n| = |a_n|\,|b_n| \le \underset{\downarrow \atop 0}{M|b_n|}$$

ma $M|b_n| \to 0$ e quindi $|a_n b_n| \to 0$

quindi $a_n b_n \to 0$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\operatorname{sen} n}{n^2 + n} = 0$$

e $\frac{1}{n^2+n} \to \frac{1}{\infty} = 0$

Esercizi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{n^2-2n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{3n^2-n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n\, n^3}{n^2+2n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 \sin n + 1}{n^3-2n+2}$$

$$\lim_{n\to\infty} n \sin \frac{\pi n}{2}$$

altre operazioni

Se $f: D \to \mathbb{R}$ è una funzione elementare

(potenza, esponenziale, sin, cos e loro inverse)

e $\boxed{a_n \to a}$ è una successione t.c.

$a_n \in D$ allora $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(\lim_{n\to\infty} a_n)$

questo produce delle NUOVE forme indeterm.

cioè $1^{\pm\infty}$; 0^0, ∞^0

$a^\infty = 0$ se $|a|<1$

$a^\infty = \infty$ se $a>1$ e NON esiste se $a<-1$

$a^0 = 1$

Verifichiamo che

$$\lim_{n\to\infty} a^n = 0 \qquad \text{se } |a|<1$$

$$\lim_{n\to\infty} a^n = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{a}\right)^n}$$

con $b = \frac{1}{a} > 1$ quindi

$b = 1 + x$ con $x > 0$ per Bernoulli

$$(1+x)^n \geq 1 + nx \overset{x=b-1}{\Longleftrightarrow} b^n \geq 1 + n(b-1)$$

quindi $\lim_{n\to\infty} b^n \geq \lim_{n\to\infty} 1 + n(b-1) = \infty$

e $\lim_{n\to\infty} a^n = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} b_n} = 0$ $\blacksquare$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1 \qquad a_n = \sqrt[n]{a}$$

se $a > 1 \Rightarrow a_n \geq 1 \qquad a = (1+x_n)^n$

pongo $a_n = 1 + x_n$

applico Bernoulli $a \geq 1 + n x_n \Rightarrow$

$$a \geq 1 + n(\sqrt[n]{a} - 1) = 1 + n(a_n - 1)$$

quindi $$1 \leq a_n \leq \frac{a-1}{n} + 1$$

$$\downarrow \qquad \downarrow$$

$$1 \qquad 1 \qquad \blacksquare$$

se $b<1$ pongo $a = \frac{1}{b} > 1$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{b} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a}} = 1 \qquad \blacksquare$$

$$a_n \to 0 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sen} a_n \to 0;$$

$$a_n \to 0 \quad \Rightarrow \quad \cos a_n \to 1;$$

$$a_n \to 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\operatorname{sen} a_n}{a_n} \to 1$$

infatti se $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

$$\operatorname{sen} x \leq x \leq \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

quindi $\cos x \leq \frac{\operatorname{sen} x}{x} \leq 1$

ma se $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq 0$

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x} = \frac{\operatorname{sen} -x}{-x} \quad \text{e} \quad \cos(x) = \cos(-x)$$

quindi anche in questo caso

$$\cos x \leq \frac{\operatorname{sen} x}{x} \leq 1$$

ora se $a_n \to 0$ definitivamente

vale $|a_n| \leq \frac{\pi}{2}$ quindi

per il teorema dei carabinieri

$$\cos a_n \leq \frac{\sin a_n}{a_n} \leq 1$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$1 \qquad\qquad 1$$

Questo implica anche che

$$\frac{\operatorname{tg} a_n}{a_n} \to 1 \qquad \frac{\arcsin a_n}{a_n} \to 1$$

se $a_n \to 0$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin\left(\frac{n^2+n}{n^3-n+1}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{2n^2+1}{n^3-1}\right)} =$$

Successioni monotone

(24.1)	a_n *strettamente crescente:*	$a_n < a_{n+1}$,	$\forall\, n \in \mathbf{N}$;
(24.2)	a_n *crescente:*	$a_n \le a_{n+1}$,	$\forall\, n \in \mathbf{N}$;
(24.3)	a_n *strettamente decrescente:*	$a_n > a_{n+1}$,	$\forall\, n \in \mathbf{N}$;
(24.4)	a_n *decrescente:*	$a_n \ge a_{n+1}$,	$\forall\, n \in \mathbf{N}$.

$a_n \ge a_{n+1} \ge a_{n+2} \dots$ decrescenti

$a_n \le a_{n+1} \le a_{n+2} \dots$ crescente

TEOREMA SULLE SUCCESSIONI MONOTÒNE. — *Ogni successione monotòna ammette limite. In particolare, ogni successione monotòna e limitata è convergente, cioè ammette limite finito.*

$-M < a_n < M$

Dimostrazione:

Facciamo prima il caso limitato.

1 $a_n \le a_{n+1} \le a_{n+2}$ e 2 $\exists \sup a_n = \ell < \infty$

Per la definizione di sup.

(Il minimo dei maggioranti)

2A $a_n \le \ell \ \forall n$

2b)

e $\forall \varepsilon > 0$ $\exists\, a_{n_0}$ tale che

$a_{n_0} \geq \ell - \varepsilon$ ma allora

per ogni $n > n_0$ si ha che

$\ell - \varepsilon \leq a_n \leq \ell$.

quindi $a_n \to \ell$.

da cui $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = \ell$.

Consideriamo ora il caso di una successione a_n crescente e non limitata (superiormente). Fissato $M > 0$ esiste $\nu \in \mathbf{N}$ tale che $a_\nu > M$. Dato che a_n è crescente, per ogni $n > \nu$ risulta

(24.10) $$a_n \geq a_\nu > M \qquad \forall\, n > \nu$$

da cui $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = +\infty$.

In modo analogo si trattano i casi relativi a successioni decrescenti.

Il numero di Nepero.

$$e := \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

dimostriamo che $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ è

① limitata e ② monotona.

Dimostrazione della (25.11): la tesi è

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq a_{n-1} = \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1}, \tag{25.13}$$

Eseguendo la somma delle frazioni, si può scrivere in modo equivalente:

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \geq \left(\frac{n}{n-1}\right)^n \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right); \tag{25.14}$$

cioè ancora

$$\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n \geq \frac{n-1}{n}. \tag{25.15}$$

È conveniente isolare come addendo 1, nel modo seguente:

$$\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \geq 1 - \frac{1}{n}. \tag{25.16}$$

Per vedere che è limitata

$$b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}. \tag{25.18}$$

Per ogni $n \in \mathbf{N}$ si ha

$$b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) = a_n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) > a_n. \tag{25.19}$$

Proveremo che b_n è una successione strettamente decrescente; dato che a_n è (strettamente) crescente, ne segue che

$$a_1 \leq a_n < b_n < b_1, \qquad \forall\, n \geq 2 \tag{25.20}$$

e quindi, essendo $a_1 = 2$, $b_1 = 4$,

$$2 \leq a_n < 4, \qquad \forall n \in \mathbf{N}; \tag{25.21}$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} < \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n}$$

$$\Updownarrow$$

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} < \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n}$$

$$\Updownarrow$$

$$\left(\frac{n+1}{n}\right) < \left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^{n}$$

$$\Updownarrow$$

$$\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^{n} > 1+\frac{1}{n}$$

ma questo segue da Bernoulli

dato che
$$\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^{n} > 1+\frac{n}{n^2-1} > 1+\frac{1}{n}$$

dato che $\frac{n}{n^2-1} > \frac{1}{n}$ $\left(\frac{n^2}{n^2-1} > 1 \,!\right)$

quindi $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$

in generale se $b_n \to \pm\infty$

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{b_n}\right)^{b_n} = e$$

inoltre se $a_n \to 0$

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+a_n\right)^{\frac{1}{a_n}} = e$$

Facciamo il caso $b_n \to +\infty$

Se b_n è sempre un numero naturale è facile

REM. $\lim_{k\to\infty} \left(1+\frac{1}{k}\right)^k = e$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists M \mid$ se $k \geq M$ $(k \in \mathbb{N})$

allora $\left|\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k} - e\right| < \varepsilon$.

ma dato che $b_n \in \mathbb{N}$ e $b_n \to \infty$

$\forall M \ \exists \nu$ t.c. se $n > \nu$ allora

$b_n > M$ ma ponendo $k = b_n$

si ha che

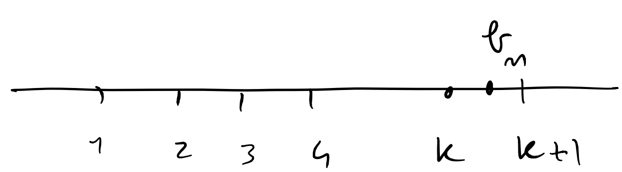
$$\left|\left(1+\frac{1}{b_n}\right)^{b_n} - e\right| < \varepsilon$$

(cioè il limite vale e)

Se b_n NON è un numero naturale

si usa la parte intera

$$[b_n] < b_n < [b_n] + 1$$



(il più grande intero $\leq b_n$) qui $k = [b_n]$

si verifica che

$$\left(1+\frac{1}{[b_n]+1}\right)^{[b_n]} \leq \left(1+\frac{1}{b_n}\right)^{b_n} \leq \left(1+\frac{1}{[b_n]}\right)^{[b_n]+1}$$

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \downarrow$$

$$e \qquad\qquad\qquad\qquad e$$

e si applica il teo dei carab.

infatti $[b_n]$ è una successione di

naturali $\to \infty$.

Per il caso $b_n \to -\infty$

facciamo un esempio ($b_n = -n$)

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{-n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n}$$

ora chiamo

$a_n = n-1$

$a_n \to \infty$ $\qquad$ e

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n-1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n+1}{a_n}\right)^{a_n+1} =$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right) = e$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$e \qquad\qquad 1$$

Esercizi ver

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2+1}\right)^{3n^2+2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{2n^2+1}$$

Corollario

pongo $\ln(x) = \log_e(x)$

in modo che $\ln(e) = 1$

allora

$$\lim_{n\to\infty} n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1$$

in generale

① $$\lim_{n\to\infty} a_n \ln\left(1+\frac{1}{a_n}\right) = 1 \quad \text{se } a_n \to \pm\infty$$

② $$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1+b_n)}{b_n} = 1 \quad \text{se } b_n \to 0$$

— · — · —

Ordini di grandezza e confronto asintotico

Def. $a_n \sim b_n$ se $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = 1$$

allo stesso modo se $a_n \geq 0$

$a_n << b_n \quad \left(a_n = o(b_n) \right)$

se $\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$

Quindi per esempio

$\sin \frac{1}{n} \sim \frac{1}{n} \sim \frac{1}{n+1}$

$3n^3 + 2n - 1 \sim 3n^3$

$|\sin(n)| << n$

CRITERIO DEL RAPPORTO (PER LE SUCCESSIONI). — *Sia* a_n *una successione a termini positivi. Definiamo* $b_n = a_{n+1} / a_n$. *Se la successione* b_n *converge ad un limite* $b < 1$, *allora la successione* a_n *tende a zero.*

$\ln n < n^a \quad \forall a > 0 \quad$ per $n > N$

$a_n \sim b_n$ se $\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$

$\Leftrightarrow \lim_{n \to \infty} \frac{b_n}{a_n} = 1$ (hp $a_n, b_n \neq 0$)

$\sin\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$

in generale se $a_n \to 0$

$\sin(a_n) \sim a_n$

infatti $\lim_{n \to \infty} \frac{\sin(a_n)}{a_n} = 1$

$n^3 \sim n^3 + n^2$

$3n^7 + 2n^6 + \dots \sim 3n^7$

$a_n \sim b_n$ e $b_n \sim c_n$

allora $a_n \sim c_n$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{c_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \cdot \frac{b_n}{c_n}$$

$$= \underbrace{\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right)}_{\downarrow \atop 1} \cdot \underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{c_n}}_{\downarrow \atop 1}$$

$$\lim \frac{3n^7 + 2n^4 - n^2}{5n^5 - 1} \sim \frac{3n^7}{5n^5}$$

$$\frac{3n^7 + 2n^4 - n^2}{3n^7} \longrightarrow 1$$