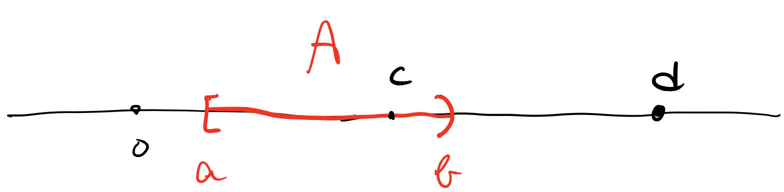
Vogliamo ora dare una definizione di limite per una funzione $f: D \to \mathbb{R}$ (D è il dominio di definizione)

il limite mi deve descrivere il comportamento di f vicino ad un punto $x_0 \in \mathbb{R}$

Si definisce il limite di una funzione f(x), per x che tende ad $x_0 \in \mathbf{R}$, nel caso in cui x_0 risulti un *punto di accumulazione* per il dominio di f(x).

In generale un numero reale x_0 si dice *punto di accumulazione* per un insieme $A \subset \mathbf{R}$ se in ogni *intorno* di x_0, cioè in ogni insieme $\{x \in \mathbf{R} : x_0 - \delta < x < x_0 + \delta\}$, con $\delta > 0$, cade almeno un punto di A distinto da x_0.

Nel prosieguo del capitolo vengono prese in considerazione soltanto funzioni il cui dominio A è costituito da un intervallo (o dall'unione finita di intervalli) e x_0, punto prescelto per il calcolo del limite, appartiene ad A od è un punto di frontiera per il dominio A (ad esempio x_0 è un estremo dell'intervallo A nel caso in cui A è, appunto, un intervallo di numeri reali); in entrambi i casi x_0 risulta punto di accumulazione per l'insieme A.



$A = [a, b)$ $\quad$ a è un punto di accumulazione

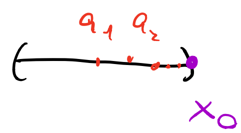
c è un punto di accumulazione

d NON lo è !

se $A = \left\{ \frac{1}{n} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$ $\quad$ 0 è l'unico pto di accumul.

Un modo di vedere i punti di accumul. è che x_0 è di accumulazione per A se posso costruire una SUCCESSIONE $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tale che $a_n \in A$, $a_n \neq x_0$ $\forall n$

$$\lim_{n \to \infty} a_n = x_0$$



DEFINIZIONE. — *Si dice che* $f(x)$ *ha limite uguale ad* ℓ *(tende o converge ad* ℓ*) per* x *che tende ad* x_0 *se, qualunque sia la successione* $x_n \to x_0$, *con* $x_n \in A$ *e* $x_n \neq x_0$ *per ogni* n, *risulta* $f(x_n) \to \ell$

quindi per esempio

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \text{dato che} \quad \forall a_n \to 0$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\sin(a_n)}{a_n} = 1$$

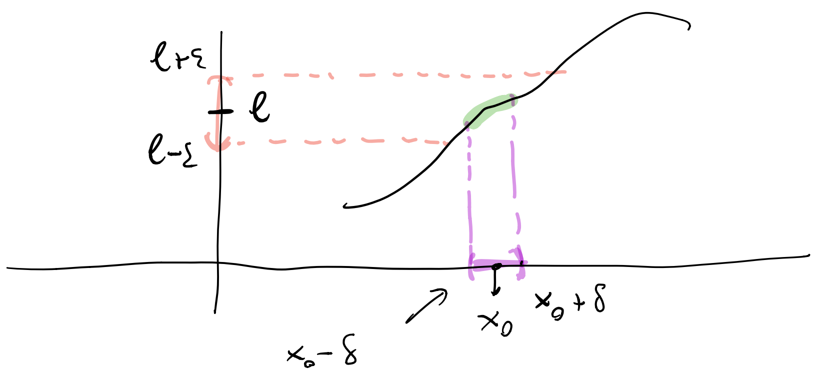
$$\lim_{x \to \infty} \frac{\sin(x)}{x} = 0 \quad \text{dato che}$$

$$\forall \quad a_n \to \infty \qquad \frac{\sin(a_n)}{a_n} \to 0$$

Se $x_0 \in \mathbb{R}$ e $\ell \in \mathbb{R}$

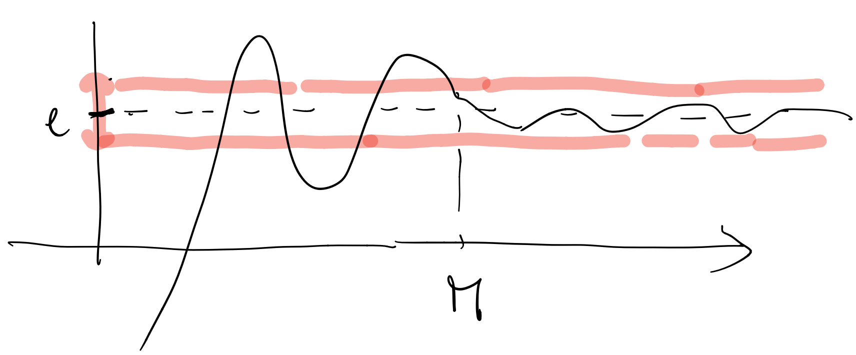
... teorema, che può essere enunciato in simboli

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \iff \forall \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0: \ |f(x) - \ell| < \varepsilon, \quad \forall x \in A: 0 \neq |x - x_0| < \delta, \tag{30.12}$$



$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \ell \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists\, \nu > 0 :$$

se $x > \nu$ allora $|f(x) - \ell| < \varepsilon.$



Se $l = +\infty$

$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ se $\forall M > 0 \ \exists \delta$ t.c.

se $|x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > M$

Nel linguaggio degli intorni:

① se $a \in \mathbb{R}$ chiamo $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ un intorno di a (di raggio $\varepsilon > 0$)

② chiamo (M, ∞) con $M \in \mathbb{R}$ un intorno di ∞ e $(-\infty, M)$ un intorno di $-\infty$

ora per $x_0, l \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ dico che

$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ se per ogni intorno $I(l)$ di l esiste un intorno di x_0 tale che $f(x)$ appartiene a $I(l)$.

È utile considerare anche i cosiddetti *limite destro* ($x \to x_0^+$) e *limite sinistro* ($x \to x_0^-$), quando ci si avvicina al punto x_0 per valori di $x \in A$ rispettivamente solo maggiori di x_0, o solo minori.

Consideriamo per brevità solo i casi di limite ℓ finito (il lettore

Nota Bene (tutti i teoremi di confronto che valgono per le successioni valgono anche per le funzioni!

successioni. Dal paragrafo 19 deduciamo le:

> OPERAZIONI CON I LIMITI DI FUNZIONI. — *Il limite della somma, differenza, prodotto, quoziente di due funzioni è rispettivamente uguale alla somma, differenza, prodotto, quoziente (se il denominatore è diverso da zero) dei due limiti, purché non sia una delle forme indeterminate* $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, ∞/∞, $0/0$.

Esempio:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} =$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos^2 x}{(1+\cos x)\, x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 x}{(1+\cos x)\, x^2}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} \lim_{x \to 0} \frac{1}{1+\cos x} = \frac{1}{2}$$

Nota bene $\forall$ successione $a_n \to 0$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1 - \cos a_n}{a_n^2} = \frac{1}{2}$$

Una ulteriore proprietà utile per le applicazioni è la seguente.

LIMITI DI FUNZIONI COMPOSTE — *Siano* g:X $\to$ Y e f:Y $\to$ **R** *due funzioni tali che*

(X, Y sottoinsiemi di $\mathbb{R}$)

$\in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

(32.11) $$\lim_{x \to x_0} g(x) = \boxed{y_0}, \qquad \lim_{y \to \boxed{y_0}} f(y) = \ell$$

ed esista $\delta > 0$ *tale che risulti* $g(x) \neq y_0$ *per ogni* $x \neq x_0$ *dell'intervallo* $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. *Allora è anche*

(32.12) $$\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = \ell.$$

$$\boxed{y_0 = \lim_{x \to x_0} g(x)}$$

$$\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = \lim_{y \to y_0} f(y) = \ell$$

Un esempio:

$$\text{per definizione} \quad \boxed{\underbrace{\lim_{y \to 0} \frac{\ln(1+y)}{y}}_{}\!\!\overset{f(y)}{=}\;\lim_{y \to 0} \frac{\ln(1+y)}{y} = 1}$$

pongo $y = e^x - 1$

$$f(y) = \frac{\ln(1+y)}{y} \qquad \boxed{g(x) = e^x - 1}$$

$$\lim_{x \to 0} e^x - 1 = 0 \quad \text{quindi}$$

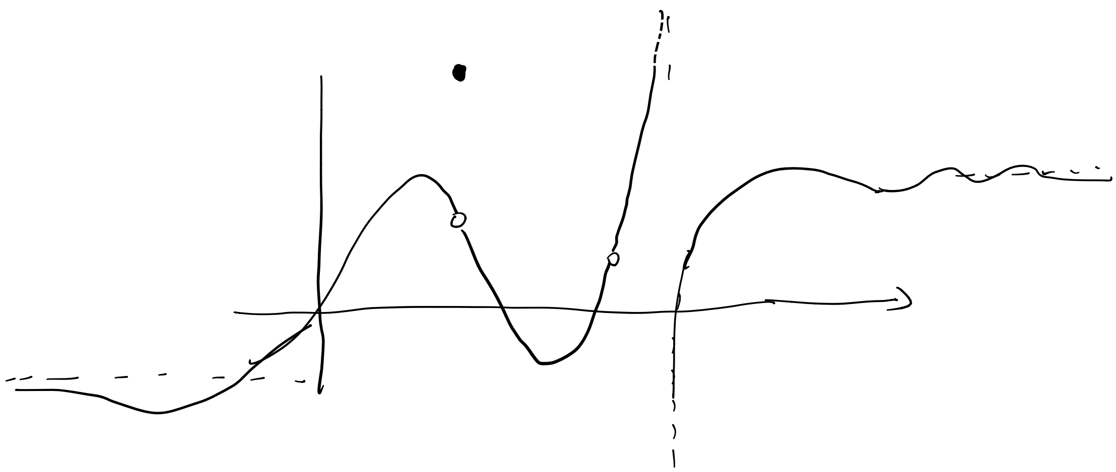
$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(e^x)}{e^x - 1} = 1 \quad \text{ma}$$

$\ln(e^x) = x$ quindi ho dimostrato che

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{e^x - 1} = 1 = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x}$$

— . . —

Esercizio grafico:



per $x \to +\infty$

$$-\frac{1}{x} < \frac{\sin x}{x} < \frac{1}{x}$$

$$\underset{x\to\infty}{\downarrow} \qquad\qquad \underset{x\to\infty}{\downarrow}$$

$$0 \qquad\qquad 0$$

per $x \to 0$

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x$$

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 \qquad \text{se} \quad x \ll 1 \quad \left(|x| < \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\underset{x\to 0}{\downarrow} \qquad\qquad \downarrow$$

1