Dato che il limite di somma, differenza, prodotto è uguale rispettivamente alla somma, differenza, prodotto dei limiti, risulta che *la somma, la differenza, il prodotto di funzioni continue è una funzione continua*. Anche *il quoziente di funzioni continue è una funzione continua*, ma come al solito occorre fare attenzione ai punti dove il denominatore si annulla.

Utilizzando la proprietà relativa ai limiti di funzioni composte (si veda il paragrafo precedente) si verifica che *la funzione composta mediante funzioni continue è continua*.

L'importanza delle funzioni continue è anche nel fatto che molte *funzioni elementari sono continue nel loro insieme di definizione*: potenze $y = x^b$, esponenziali $y = a^x$, logaritmi $y = \log_a x$, funzioni trigonometriche $y = \text{sen } x$, $y = \cos x$, $y = \text{tg } x$, valore assoluto $y = |x|$.

$f(x)$, $g(x)$ continue in x_0

$\frac{f(x)}{g(x)}$ è continua se $g(x_0) \neq 0$

in questo caso $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x_0)}{g(x_0)}$

$f(y)$ è continua in $g(x_0)$

$g(x)$ è " " in x_0

allora $f(g(x))$ è continua in x_0

$$\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = \lim_{y \to g(x_0)} f(y) = f(g(x_0))$$

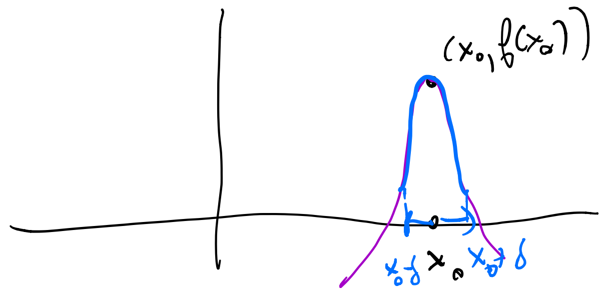
Permanenza del segno

$f(x)$ continua t.c. $f(x_0) > 0$

allora $\exists\, \delta > 0$:

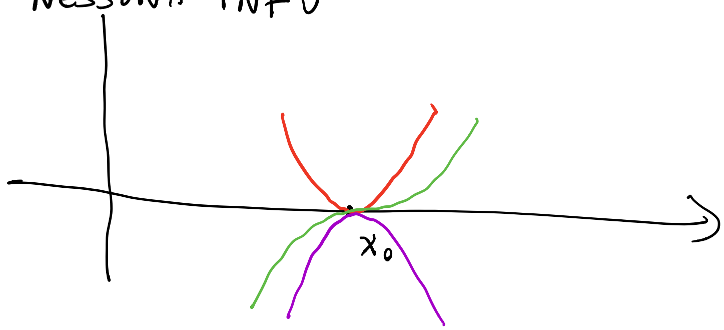
in $(x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$

$f(x) > 0$

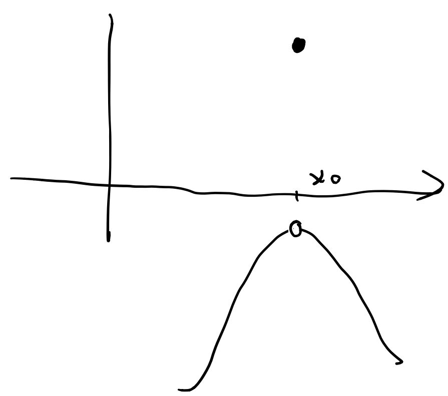


OSSERVAZIONI e controesempi

se $f(x_0) = 0$ NESSUNA INFO



Se f NON è continua NESSUNA INFO



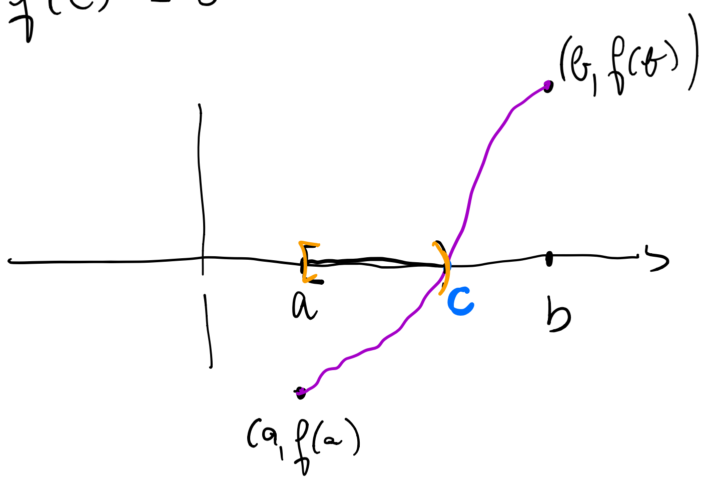
Teorema degli zeri

f continua in $[a,b]$

se $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$ $\left[\text{in gen } f(a) \cdot f(b) < 0 \right]$

allora $\exists \; c \in (a,b)$ tale che

$$f(c) = 0$$



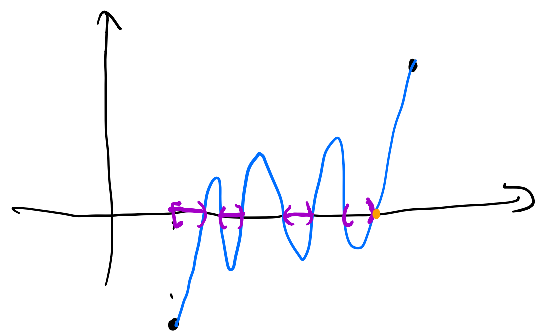
$$I_- := \{ x \in [a,b] : f(x) < 0 \}$$

$a \in I_- \Rightarrow I_-$ non è vuoto!

$b \notin I$ perché $f(b) > 0$

chiamo $c = \sup I_-$

sostengo che $f(c) = 0$!

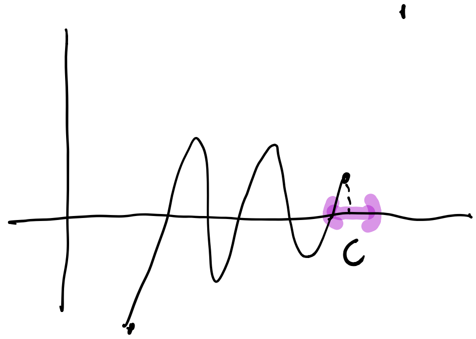


se $f(c) > 0$

allora

$f(x) > 0$

per $x \in (c-\delta, c+\delta)$

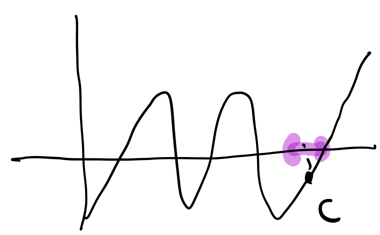


ma allora

$\sup I_- \leq c-\delta$ il che è ASSURDO

se $f(c) < 0$

allora $f(x) < 0$



in $(c-\delta, c+\delta)$

ma allora $\sup I_- \geq c+\delta$ il che è ASSURDO

metodo alternativo × iterazione

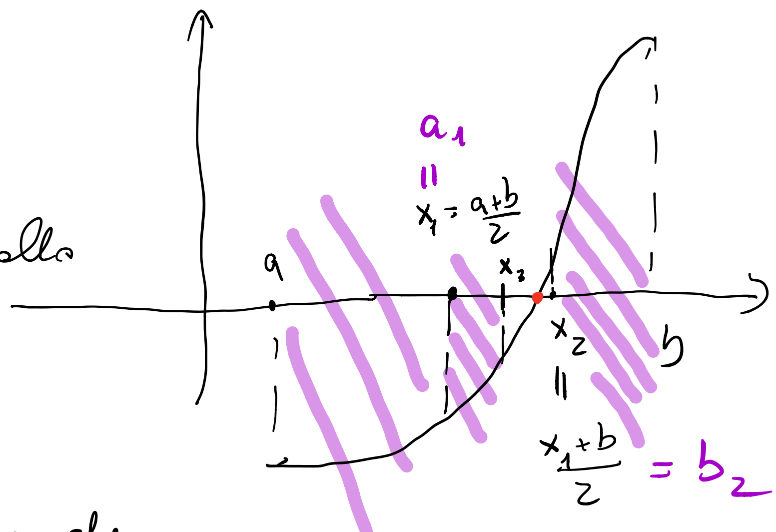
$x_1 = \frac{a+b}{2}$

dato che $f(x_1) < 0$

considero l'intervallo

$[a_1, b_1]$ con

$a_1 = x_1$ e $b_1 = b$



$x_2 = \frac{a_1 + b_1}{2}$ dato che $f(x_2) > 0$ considero

l'intervallo $[a_2, b_2]$ con $a_2 = a_1$ e $b_2 = x_2$

$x_3 = \frac{a_2 + b_2}{2}$ etc.. le $x_i \longrightarrow \bar{x}$ con $f(\bar{x}) = 0$!

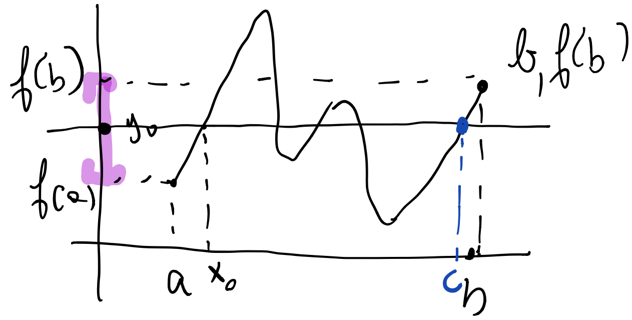
Teorema dei valori intermedi (Versione 1)

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua

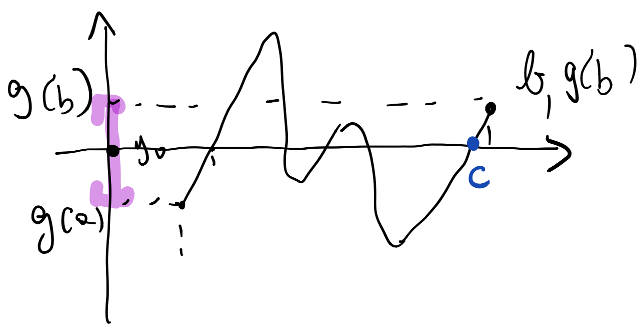
allora f assume tutti i valori fra

$f(a)$ e $f(b)$

$\exists$ almeno un $x_0 : f(x_0) = y_0$

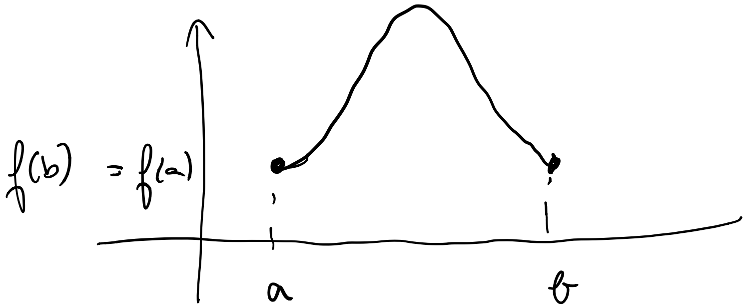


infatti se pongo $g(x) = f(x) - y_0$



$g(b) > 0 \qquad g(a) < 0 \qquad \exists\, c : g(c) = 0$

$f(c) - y_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad f(c) = y_0$

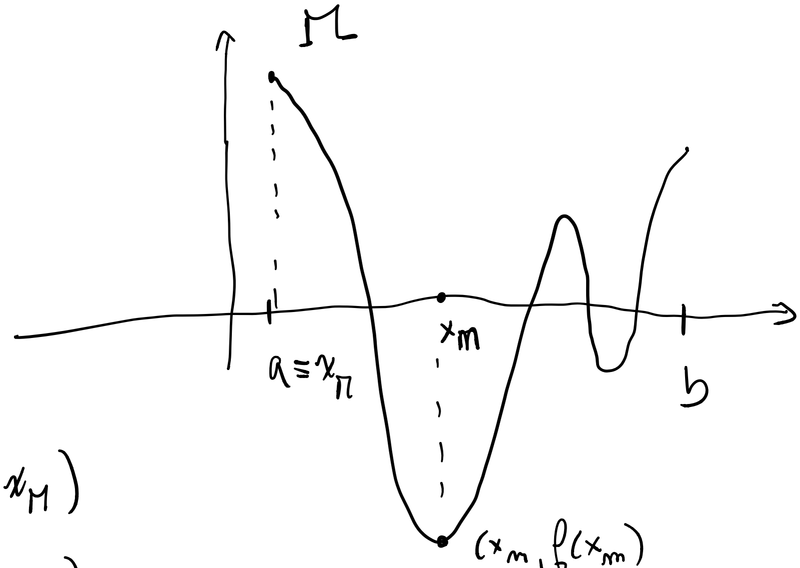


Teorema di Weierstrass

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ (intervallo chiuso e limitato $[a,b]$)
continua

allora esistono $x_m, x_M \in [a,b]$

t.c. $\underbrace{f(x_m)}_{m} \le f(x) \le \underbrace{f(x_M)}_{M} \quad \forall\, x \in [a,b]$



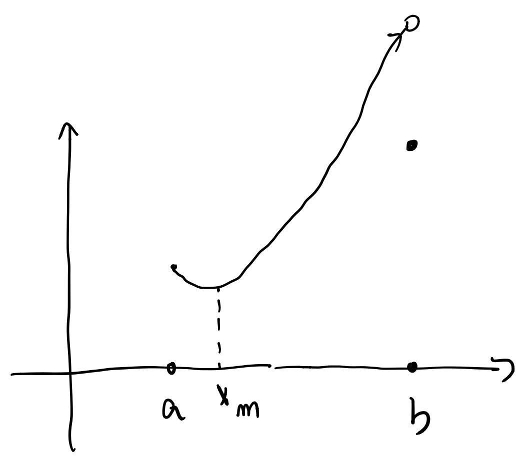
$M = f(x_M)$

$m = f(x_m)$

OSSERVAZIONI e CONTROESEMPI

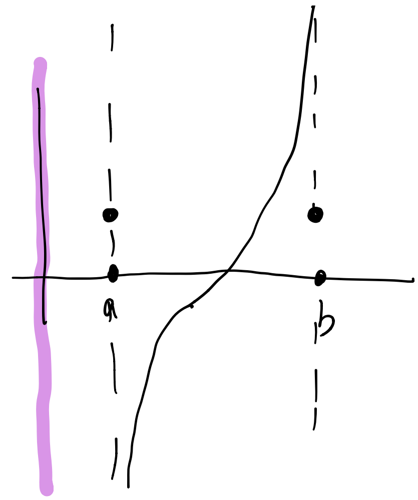
è continua in $[a, b)$

NON ha un valore MASSIMO



$$\sup_{x\in[a,b]} f(x) = +\infty$$

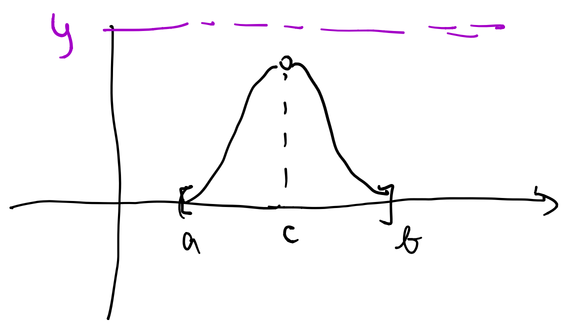
REM



continua in (a,b)

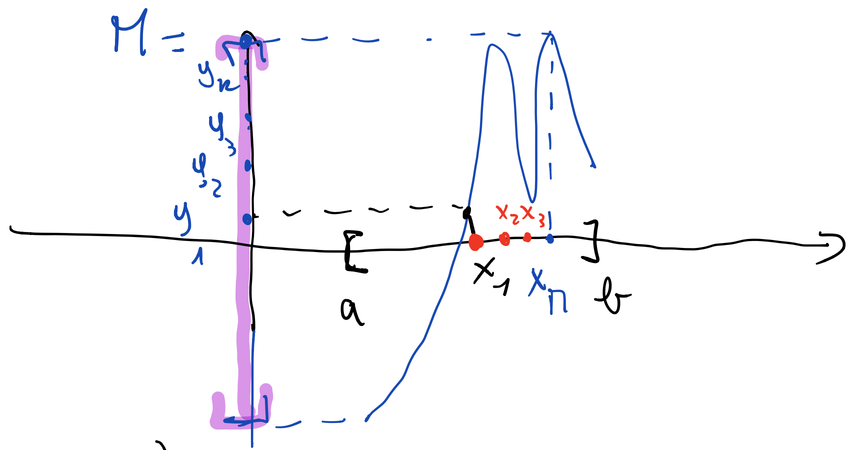
$$\sup \{ y : \; y = f(x) \quad \text{con} \quad x \in [a,b] \}$$

il sup è il minimo valore delle ordinate t.c. $y > f(x)$ per $x \in [a,b]$



$$\sup_{x\in[a,b]} f(x) = 4$$

Schema di dimostrazione



$$M = \sup\left(f([a,b])\right) = \sup_{x \in [a,b]} f(x)$$

costruisco una successione di punti

$y_1, y_2, \dots, y_k \dots$ in $f([a,b])$

t.c. $y_n \to M$

a ciascun y_k corrisponde un

$x_k : f(x_k) = y_k$ supponiamo che

x_k abbia un limite. Allora

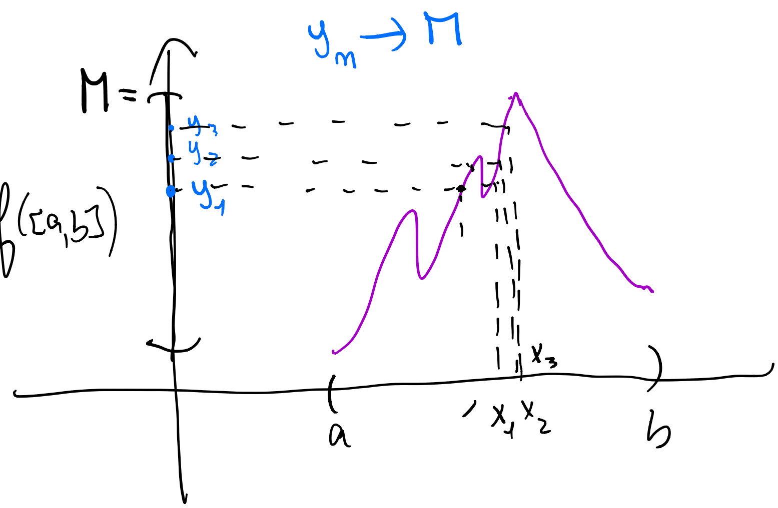
$x_k \to x_{Max}$ $\quad x_{Max} \in [a,b]$

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = f(x_{max})$$

$$\parallel$$

$$\lim_{n\to\infty} y_n = M$$

$$f(x_{max}) = M$$



Valori intermedi:

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua

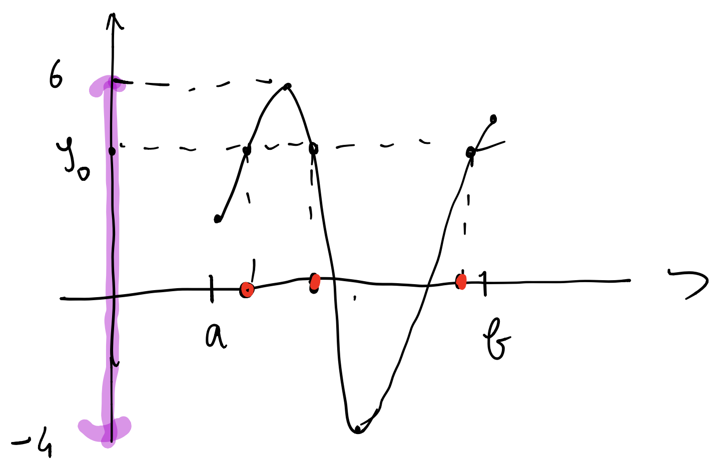
assume tutti i valori fra $f(x_m)$ e $f(x_M)$

$x_m = 7$

$f(x_m) = -4$

$x_n = 5$

$f(x_n) = 6$



$\exists \; x_0 : \quad f(x_0) = y_0$

CLASSIFICAZIONE delle DISCONTINUITÀ

$f : D \longrightarrow \mathbb{R} \qquad x_0 \in D$

$f(x)$ NON è continua in x_0

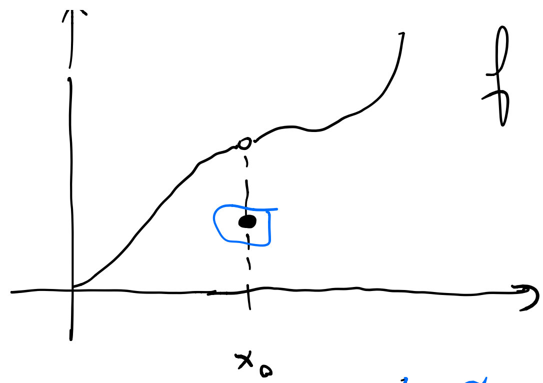
① Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$

(ma $\ell \neq f(x_0)$)

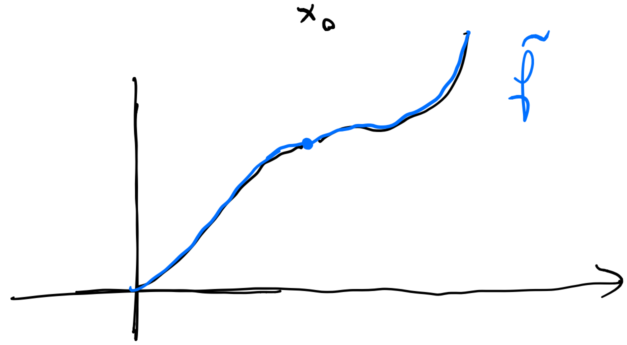
$\Rightarrow f$ ha una discontinuità eliminabile

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 4$$

$$f(x_0) = 2$$



Per rendere f continua basta cambiare il suo valore in x_0!



se definisco $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \neq x_0 \\ \ell & \text{se } x = x_0 \end{cases}$

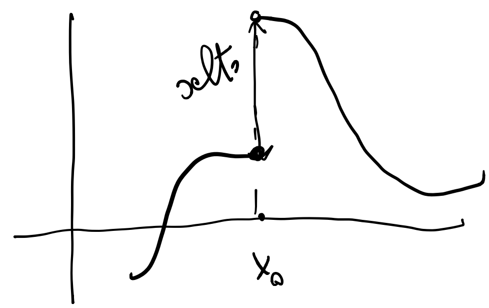
$\Downarrow$ $\tilde{f}$ è continua

② Discontinuità a salto (1. specie)

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell_+ \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell_- \in \mathbb{R}$$

ma $\ell_+ \neq \ell_-$



$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = 2$$

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = 6$$

③ Discontinuità di seconda specie

se o non esiste $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$

o non esiste $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$

oppure il limite esiste ma vale $\pm\infty$