TEOREMA SUL LIMITE DELLE FUNZIONI MONOTÒNE. — *Sia* f(x) *monotòna in* [a, b]; *allora esistono finiti i limiti*

(38.1) $\lim_{x \to a^+} f(x), \qquad \lim_{x \to b^-} f(x);$

(38.2) $\lim_{x \to x_0^-} f(x), \qquad \lim_{x \to x_0^+} f(x); \qquad \forall x_0 \in (a, b).$

In sostanza la funzione NON può oscillare dato che è monotona?

CRITERIO DI INVERTIBILITÀ. — *Una funzione continua e strettamente monotòna in un intervallo* [a, b] *è invertibile in tale intervallo.*

Abbiamo già visto che la funzione è iniettiva. Il teorema dei valori intermedi ci dice che è suriettiva (assume tutti i valori fra f(a) ed f(b) 1 volta sola)

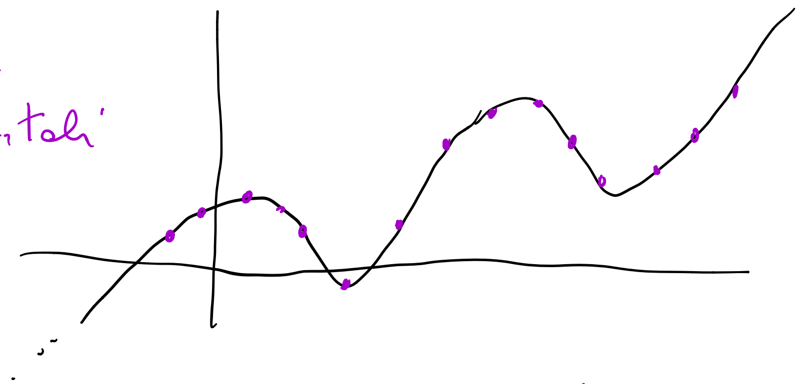
$x \to a^+$

TEOREMA DI CONTINUITÀ DELLE FUNZIONI INVERSE. — *Sia* f(x) *una funzione strettamente monotòna in* [a, b]. *Se* f(x) *è continua, anche la funzione inversa* f^{-1} *è continua.*

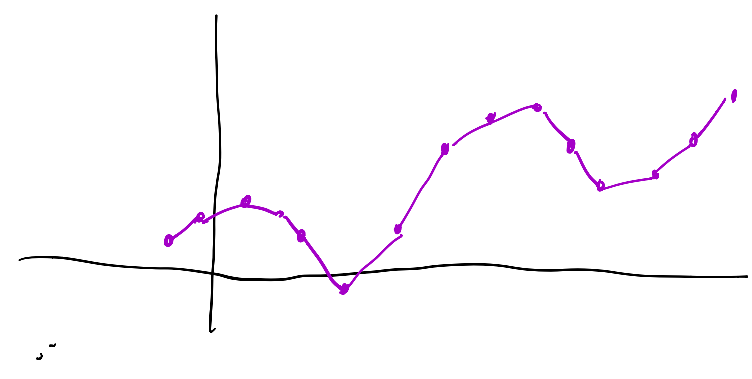
La derivabilità

Vorrei approssimare il grafico di funzioni tramite funzioni semplici

Per esempio ho una funzione ottenuta da dati sperimentali



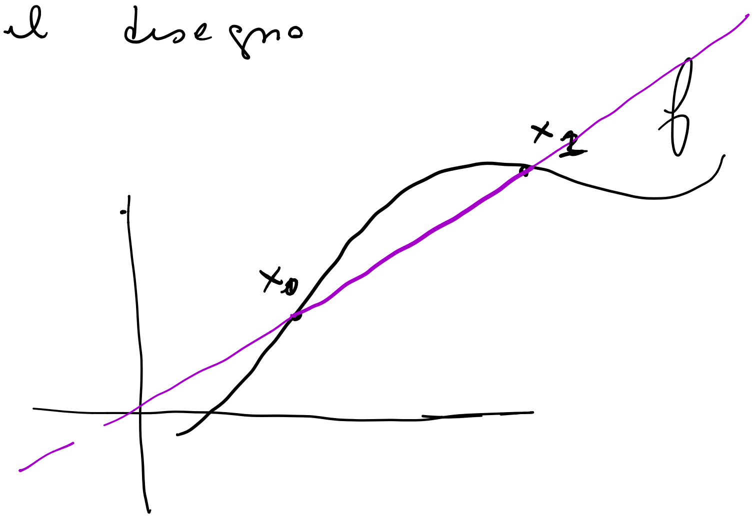
⇓ approssimo con una spezzata



Se ho abbastanza punti questa è una buona approx della funzione.

Ingrandisco il disegno

la retta viola (SECANTE) passa per $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$



quindi ha come equazione

$$y = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

Se $x_1 = x_0 + h$ con $|h| << 1$

la retta secante approssima il grafico $y = f(x)$ molto bene (per h piccolo)

Considero ora il coeff. angolare della retta secante $(x_1 = x_0 + h)$

$$\Delta(x_0, h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Voglio fare il limite per $h \to 0$

Definizione: se il limite esiste finito

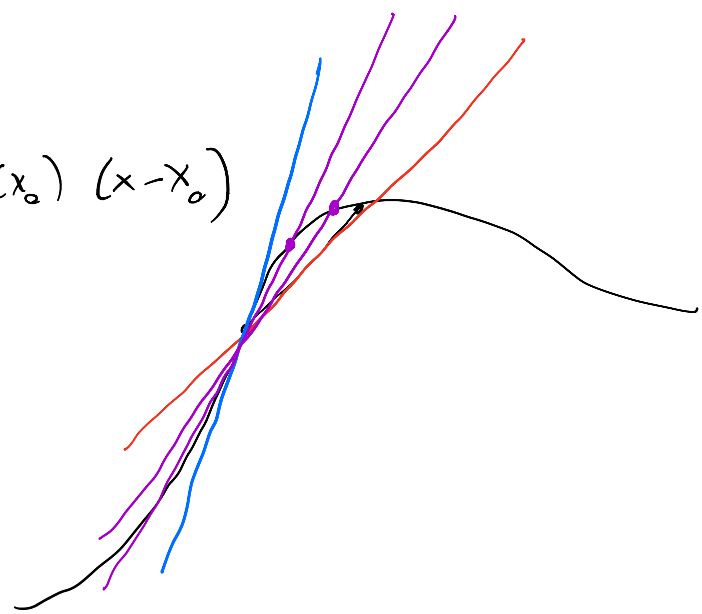
$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

questo numero lo chiamo la derivata di f in x_0 $\left(\frac{df}{dx}(x_0),\ Df(x_0) \right)$

RAPPRESENTA il coefficiente angolare della RETTA TANGENTE

di equazione

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$



Un pò di esempi (vedi AM1_17b)

TEOREMA 1.

Se f è derivabile in x_0 $\Rightarrow$

① f è continua in x_0

② $$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - [f(x_0) + f'(x_0)h]}{h} = 0$$

[equiv. $$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)]}{x-x_0} = 0$$

Dim:

① $$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{h \to 0} f(x_0+h) =$$

$$\lim_{h \to 0} \left(f(x_0+h) - f(x_0) + f(x_0) \right) =$$

$$f(x_0) + \lim_{h \to 0} f(x_0+h) - f(x_0) =$$

$$= f(x_0) + \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \cdot h =$$

$$f(x_0) + \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \cdot \lim_{h \to 0} h = f(x_0)$$

2

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - \left[f(x_0) + f'(x_0)\, h\right]}{h} =$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0) = f'(x_0) - f'(x_0) = 0$$

Quindi posso approssimare f con la retta tangente vicino a x_0

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(|x - x_0|)$$

REM $o(|x-x_0|)$ vuole solo dire che

$$R = o(|x - x_0|) \iff \lim_{x \to x_0} \frac{R(x)}{x - x_0} = 0$$

(Vedi AM1_17b)

Ora se per ogni x esiste la derivata di f in x

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

questo mi definisce una funzione

$x \to f'(x)$ che chiamo la derivata di f.

Osservazione se $f(x) = c$ (costante)

$f'(x) = 0$ per ogni x

OPERAZIONI CON LE DERIVATE. — *Se* f *e* g *sono due funzioni derivabili in un punto* x, *allora sono derivabili in* x *anche la somma, la differenza, il prodotto, il quoziente purché il denominatore sia diverso da zero), e si ha:*

(41.1) $$(f \pm g)' = f' \pm g' \,;$$

(41.2) $$(fg)' = f'g + fg' \,;$$ ← REGOLA DI LEIBNITZ

(41.3) $$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}, \qquad (\text{se } g \neq 0).$$

N.B la 41.3 si deduce dalla regola di LEIBNITZ.

infatti se $(fg)' = f'g + fg'$

allora $\left(g \cdot \frac{1}{g}\right)' = g' \frac{1}{g} + g \cdot \left(\frac{1}{g}\right)'$

ma dato che $g(x) \cdot \frac{1}{g(x)} = 1$ per ogni x

e $\frac{d}{dx} 1 = 0$ allora

$$g' \frac{1}{g} + g \cdot \left(\frac{1}{g}\right)' = 0 \quad \Rightarrow$$

$\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}$ ora

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)' = f' \cdot \left(\frac{1}{g}\right) + f \cdot \left(\frac{1}{g}\right)'$$

$$= \frac{f'}{g} + f \cdot \left(-\frac{g'}{g^2}\right) = \frac{f'}{g} - \frac{fg'}{g^2}$$

mettendo a denominatore comune

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

TEOREMA DI DERIVAZIONE DELLE FUNZIONI COMPOSTE. — *Se* g *è una funzione derivabile in* x, *e se* f *è una funzione derivabile nel punto* g(x), *allora la funzione composta* f(g(x)) *è derivabile in* x, *e si ha*

$$\mathrm{Df}(g(x)) = f'(g(x)) \cdot g'(x). \tag{42.1}$$

TEOREMA DI DERIVAZIONE DELLE FUNZIONI INVERSE. — *Sia* f(x) *una funzione continua e strettamente crescente (oppure strettamente decrescente) in un intervallo* [a, b]. *Se* f *è derivabile in un punto* $x \in (a, b)$ *e se* $f'(x) \neq 0$, *allora anche* f^{-1} *è derivabile nel punto* $y = f(x)$ *e la derivata vale*

$$\mathrm{D}f^{-1}(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}. \tag{42.11}$$