OPERAZIONI CON LE DERIVATE. — *Se f e g sono due funzioni derivabili in un punto x, allora sono derivabili in x anche la somma, la differenza, il prodotto, il quoziente purché il denominatore sia diverso da zero), e si ha:*

(41.1) $\quad (f \pm g)' = f' \pm g'$;

(41.2) $\quad (fg)' = f'g + fg'$; ← REGOLA DI LEIBNITZ

(41.3) $\quad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$, (*se* $g \neq 0$).

N.B la 41.3 si deduce dalla regola di LEIBNITZ.

infatti se $(fg)' = f'g + fg'$

allora $\left(g \cdot \frac{1}{g}\right)' = g' \frac{1}{g} + g \cdot \left(\frac{1}{g}\right)'$

ma dato che $g(x) \cdot \frac{1}{g(x)} = 1$ per ogni x

e $\frac{d}{dx} 1 = 0$ allora

$$g' \frac{1}{g} + g \cdot \left(\frac{1}{g}\right)' = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2} \quad \text{ora}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)' = f' \cdot \left(\frac{1}{g}\right) + f \cdot \left(\frac{1}{g}\right)'$$

$$= \frac{f'}{g} + f \cdot \left(-\frac{g'}{g^2}\right) = \frac{f'}{g} - \frac{f g'}{g^2}$$

mettendo a denominatore comune

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

Esempi (vedi libro e lezione)

$$\frac{d}{dx} x^2 = \left(\frac{d}{dx} x\right) \cdot x + x \cdot \frac{dx}{dx} = 2x.$$

$$\frac{d}{dx} x^3 = \left(\frac{d}{dx} x^2\right) \cdot x + x^2 \cdot \left(\frac{d}{dx} x\right) = 2x \cdot x + x^2 \cdot 1 = 3x^2$$

$$\frac{d}{dx} x^k = k\, x^{k-1}$$

Per induzione. se $k=1$ vero

se è vero fino a $k=n$ allora

$x^{n+1} = x \cdot x^{n}$ e quindi

$$\frac{d}{dx}\left(x^{n+1}\right) = \left(\frac{d}{dx}x^{n}\right)\cdot x + x^{n}\cdot\left(\frac{d}{dx}x\right) =$$

$$= n\,x^{n-1}\cdot x + x^{n} = (n+1)\,x^{n} \quad \blacksquare$$

in generale $\dfrac{d}{dx}x^{\alpha} = \alpha\, x^{\alpha-1}$ (con $\alpha \in \mathbb{R}$)

quindi $\dfrac{d}{dx}x^{-2} = (-2)\,x^{-2-1}$

$$\frac{d}{dx}x^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1}.$$

La derivata di e^{x}.

$$\frac{d}{dx}e^{x} = \lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^{x}}{h} = e^{x}\lim_{h\to 0}\frac{e^{h}-1}{h} = e^{x}$$

TEOREMA DI DERIVAZIONE DELLE FUNZIONI COMPOSTE. — *Se* g *è una funzione derivabile in* x, *e se* f *è una funzione derivabile nel punto* g(x), *allora la funzione composta* f(g(x)) *è derivabile in* x, *e si ha*

$$\text{(42.1)} \qquad Df(g(x)) = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Dim:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(g(x+h))-f(g(x))}{h} =$$

$$\ast = \lim_{h\to 0} \frac{f(g(x+h))-f(g(x))}{g(x+h)-g(x)} \quad \frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(g(x+h))-f(g(x))}{g(x+h)-g(x)} \cdot \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

$$= \lim_{k\to 0} \frac{f(g(x)+k)-f(g(x))}{k} \cdot g'(x) =$$

$$= f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

pongo

$$g(x+h) = g(x) + k$$

$\ast$ Devo ipotizzare che $g(x+h)-g(x) \neq 0$!

IN PIÙ

Dimostrazione alternativa: Più lunga ma + accurata

Pongo $x \rightsquigarrow x_0$ per chiarezza

$f(y)$ è derivabile in $y_0 = g(x_0)$ quindi

① $f(y) = f(y_0) + f'(y_0)(y - y_0) + o(|y - y_0|)$

$\downarrow$

va a zero molto veloce se $y \to y_0$

② $g(x)$ è derivabile in x_0 quindi

$g(x) = g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0) + o(|x - x_0|)$

$\Downarrow$

va a zero molto veloce se $x \to x_0$

Applichiamo ① con $y = g(x)$ [REM $y_0 = g(x_0)$

$$f(g(x)) = f(y_0) + f'(y_0)(g(x) - y_0) + o(|g(x) - y_0|)$$

$$= f(g(x_0)) + f'(g(x_0))\left[g(x) - g(x_0)\right] + o(|g(x) - g(x_0)|)$$

$\Downarrow$

applico ② in $g(x)$

se $x \to x_0$

$g(x) \to g(x_0)$

quindi questo

$\Rightarrow 0$

velocemente

se $x \to x_0$

$$f(g(x)) = f(g(x_0)) + f'(g(x_0))\left[g'(x_0)(x-x_0) + o(|x-x_0|)\right] + o(|x-x_0|)$$

$$= f(g(x_0)) + f'(g(x_0))\, g'(x_0)\,(x-x_0) + o(|x-x_0|)$$

l'approssimazione lineare è

$$f(g(x_0)) + (f \circ g)'(x_0)\,(x-x_0)$$

e di conseguenza $(f \circ g)' = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$

Esempio:

① $\dfrac{d}{dx} e^{x^2+1}$

$f(y) = e^y$

$g(x) = x^2+1$

$f'(y) = e^y$

$g'(x) = 2x$

$\dfrac{d}{dx} f(g(x)) = e^{x^2+1} \cdot 2x$

② $\dfrac{d}{dx} e^{\ln(x)}$

$f(y) = e^y$

$g(x) = \ln x$

$$\frac{d}{dx} e^{\ln(x)} = e^{\ln(x)} \cdot \left(\frac{d}{dx} \ln(x)\right)$$

ma $e^{\ln(x)} = x$ quindi

$$1 = x \cdot \frac{d}{dx} \ln(x)$$

cioè $\dfrac{d}{dx} \ln(x) = \dfrac{1}{x}$!

In generale

TEOREMA DI DERIVAZIONE DELLE FUNZIONI INVERSE. — *Sia* $f(x)$ *una funzione continua e strettamente crescente (oppure strettamente decrescente) in un intervallo* $[a, b]$. *Se* f *è derivabile in un punto* $x \in (a, b)$ *e se* $f'(x) \neq 0$, *allora anche* f^{-1} *è derivabile nel punto* $y = f(x)$ *e la derivata vale*

$$Df^{-1}(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}. \qquad (42.11)$$