Derivata della funzione composta:

$$\left(f(g(x))\right)' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

ora <u>**SE** $g$ è l'inversa di $f$</u>

cioè $f(g(x)) = x$

allora sostituendo (REM. $(x)' = 1$)

$$1 = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

cioè $$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$$

$$\left(f^{(-1)}(x)\right)' = \frac{1}{f'(f^{(-1)}(x))}$$

ESEMPIO (visto ieri il $\log(x)$)

$f(y) = \sin(y)$ $\quad$ $g(x) = \arcsin(x)$

$\Downarrow$ $\quad$ $-1 \leq x \leq 1$

$$f'(y) = \cos(y)$$

$$(\arcsin(x))' = \frac{1}{\cos(\arcsin x)}$$

Posso scrivere più pulito $(y = \arcsin x)$

$$\cos(y) = \sqrt{1 - \sin^2(y)}$$

il segno + dato che $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$

ma $\sin(\arcsin(x)) = x$ ! quindi

$$\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1 - x^2}$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Proviamo con $\operatorname{tg}(x)$

calcoliamo la derivata

$$(\operatorname{tg}(x))' = 1 + \operatorname{tg}^2(x) \left( = \frac{1}{\cos^2 x} \right)$$

$f(y) = tg(y) \qquad f'(y) = 1 + tg^2(y)$

$g(x) = arctg(x)$

$$(arctg\, x)' = \frac{1}{1 + tg^2(arctg\, x)} = \frac{1}{1 + x^2}$$

Conosciamo un po' di derivate

$$\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x} \; ; \quad \frac{d}{dx} e^x = e^x \; ; \quad \frac{d}{dx} \sin x = \cos x$$

$$\frac{d}{dx} \cos x = -\sin x \; ; \quad \frac{d}{dx} \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d}{dx} arctg\, x = \frac{1}{1+x^2}$$

UN PO DI ESERCIZI.

$$\frac{d}{dx} \left( \cos(4x^2+2) \right) \qquad \ldots$$

Teoremi che usano le derivate:

Il teorema di Fermat:

Sia $f$ una funzione $(a, b) \to \mathbb{R}$

e sia $x_0$ un PUNTO DI MASSIMO (O MIN)

$x_0 \in (a, b)$.

Se $f$ è derivabile in $x_0$ allora

$f'(x_0) = 0$

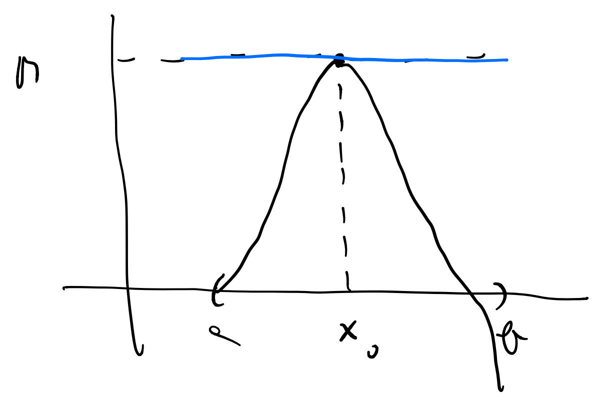
graficamente

se il grafico

di $f$ sta sotto

alla retta $y = M$

e $f(x_0) = M$ allora




la retta $y = M$ è la tangente in $x_0$

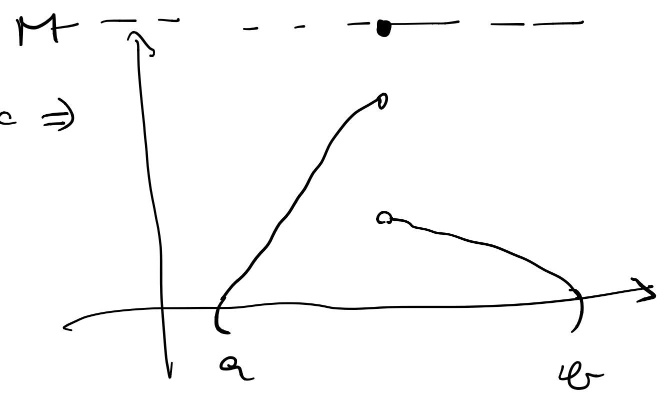
(dato che la retta è ORIZZONTALE $f'(x_0) = 0$.!)

Naturalmente se $f$ NON è derivabile in $x_0$

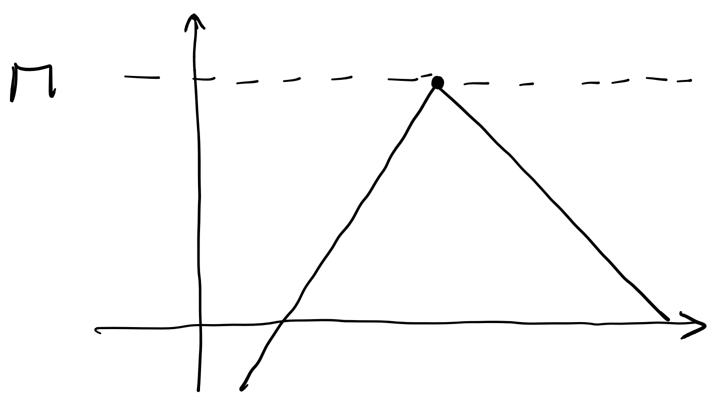
il DISCORSO SOPRA non ha SENSO

(contro) ESEMPI

$f$ NON continua $\Rightarrow$




$f$ NON derivabile. $\rightarrow$




DIMOSTRAZIONE:

dato che $x_0$ è PUNTO DI MAX LOCALE

$$f(x_0+h) \leq f(x_0) \quad \text{per } |h| \ll 1$$

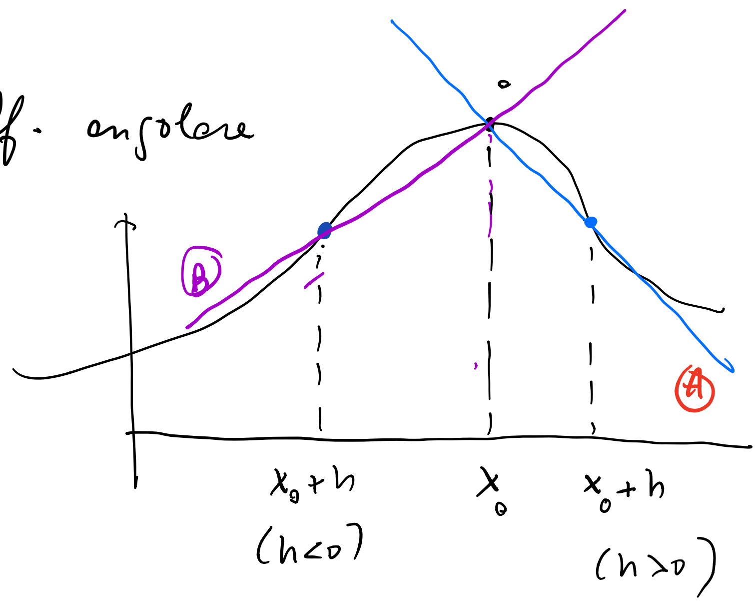
(abbastanza piccolo)

$$f(x_0+h) - f(x_0) \leq 0$$

questo vuol dire che :

$$\begin{cases} Ⓐ \ \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \leq 0 & \text{se } h > 0 \\[2ex] Ⓑ \ \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \geq 0 & \text{se } h < 0 \end{cases}$$

(il segno del coeff. angolare delle rette secanti CAMBIA a seconda se $h > 0$ Ⓐ o $h < 0$ Ⓑ




Per il TEOREMA DELLA PERMANENZA DEL SEGNO

dato che $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \leq 0$ se $h > 0$

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \leq 0$$

allo stesso modo

dato che $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \geq 0$ se $h>0$

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \geq 0$$

ma dato che esiste $f'(x_0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

allora

$$0 \leq \lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \leq 0$$

$$0 \leq f'(x_0) \leq 0 \quad \Rightarrow \quad f'(x_0) = 0 \quad !$$

Quindi se $f$ è derivabile nel suo DOMINIO TUTTI i punti di MAX/MIN locali SONO PUNTI CRITICI (cioè $f'(x_m) = 0$ )