(2.1) *Proprietà associativa:*
$(a + b) + c = a + (b + c), \quad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c).$

(2.2) *Proprietà commutativa:* $a + b = b + a, \quad a \cdot b = b \cdot a.$

(2.3) *Proprietà distributiva:* $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$

(2.4) *Esistenza degli elementi neutri: esistono in* **R** *due numeri distinti* 0, 1, *tali che* $a + 0 = a, \quad a \cdot 1 = a.$

(2.5) *Esistenza degli opposti: per ogni numero reale* a *esiste un numero reale, indicato con* $-a$, *tale che* $a + (-a) = 0.$

(2.6) *Esistenza degli inversi: per ogni numero reale* $a \neq 0$ *esiste un numero, indicato con* a^{-1}, *tale che* $a \cdot (a^{-1}) = 1.$

Assiomi relativi all'ordinamento. È definita la relazione di *minore o uguale* (≤) tra coppie di numeri reali con le seguenti proprietà:

(2.7) *Dicotomia: per ogni coppia di numeri reali* a, b *si ha* $a \leq b$ *oppure* $b \leq a$.

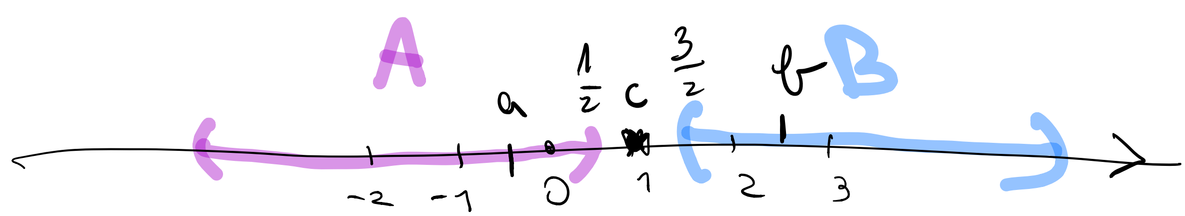
(2.8) *Proprietà asimmetrica: se valgono contemporaneamente le relazioni* $a \leq b$, $b \leq a$, *allora* $a = b$.

(2.9) *Se* $a \leq b$ *allora vale anche* $a + c \leq b + c$.

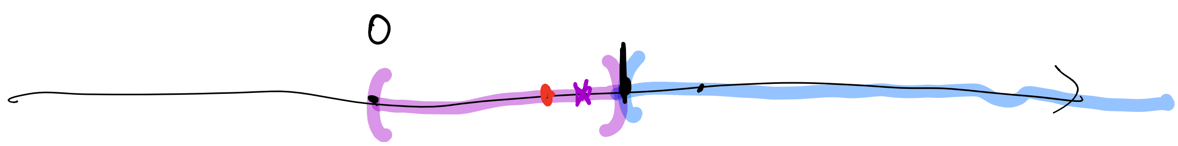
(2.10) *Se* $0 \leq a$ e $0 \leq b$ *allora valgono anche* $0 \leq a + b$, $0 \leq a \cdot b$.

Assioma di completezza

(2.11) *Siano* A *e* B *due insiemi non vuoti di numeri reali con la proprietà che* $a \leq b$, *comunque si scelgano* a *elemento di* A *e* b *elemento di B. Allora esiste almeno un numero reale* c *tale che* $a \leq c \leq b$, *qualunque siano* a *in* A *e* b *in* B.



$a \leq c \leq b$



$A : \{ x \in \mathbb{R} : \quad x^2 \leq 2 \quad e \quad x \geq 0 \}$

$B : \{ x \in \mathbb{R} : \quad x^2 \geq 2 \quad e \quad x \geq 0 \}$

Vorrei mostrare che l'elemento separatore c è tale che $c^2 = 2$.

INFATTI per assurdo se $c^2 < 2$ possiamo porre $c^2 = 2 - \varepsilon$ (con $\varepsilon > 0$)

ma allora NON è VERO che $\forall a \in A$

$\Rightarrow a \leq c$ [illegible] A

$\rightarrow$ $a \le c$ per ogni a in A

infatti se prendo $\boxed{a = c + \frac{\varepsilon}{4c}}$

$$a^2 = c^2 + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon^2}{16c^2} = 2 - \varepsilon + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon^2}{16c^2} = 2 - \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon^2}{16c^2}$$

(quindi $a \in A$) $\quad \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon^2}{16c^2} > 0$

e chiaramente $a \not\le c$ $\quad \left(a = c + \frac{\varepsilon}{4c} \right)$

questo è > 0!

Densità dei razionali in $\mathbb{R}$

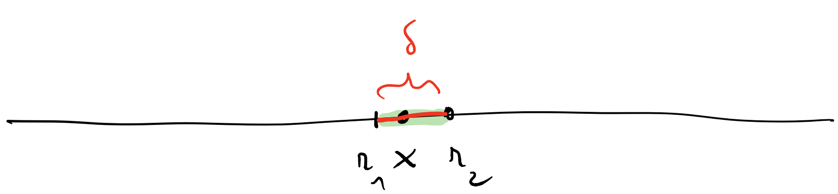
per ogni x numero reale

per ogni δ " "

esistono (almeno) due numeri

razionali r_1, r_2 tali che

$$r_1 \le x \le r_2 \quad e \quad 0 \le r_2 - r_1 \le \delta$$



questo implica che $0 \le x - r_1 \le \delta$

e $0 \le r_2 - x \le \delta$!

Dimostrare che

$$(-a) \cdot b = -(a \cdot b)$$

basta mostrare che

$$(-a) \cdot b + a \cdot b = 0$$

il che segue dal fatto che

$$(-a) \cdot b + a \cdot b = \left((-a) + a \right) \cdot b = \underset{\substack{\shortparallel \\ 0}}{0 \cdot b}$$

corollario $\blacksquare$

$$(-a) \cdot (-b) =$$

$$-\left(a \cdot (-b)\right) = -\left(-\left(a \cdot b\right)\right) = a \cdot b$$

REM: $-(-x) = x$

Esercizio:

dimostrare che NON esiste NESSUN NUMERO REALE x t.c. $x^2 < 0$

Insiemi:

Risulta poi utile, per gli sviluppi formali della teoria, considerare, tra i vari insiemi, anche un insieme privo di elementi: l'*insieme vuoto*, che si indicherà col simbolo $\emptyset$.

Introduciamo ora i simboli di inclusione: $\subseteq, \supseteq, \subset, \supset$, che danno luogo anch'essi a predicati binari. Anzitutto diremo che *i due insiemi A e B sono uguali se e solo se hanno gli stessi elementi*, cioè

$$A = B \iff (x \in A \iff x \in B) .$$

Si dice che B è un **sottoinsieme** di A (oppure B è *contenuto* in A) e si scrive $B \subseteq A$ (oppure $A \supseteq B$), se ogni elemento di B è un elemento di A, cioè

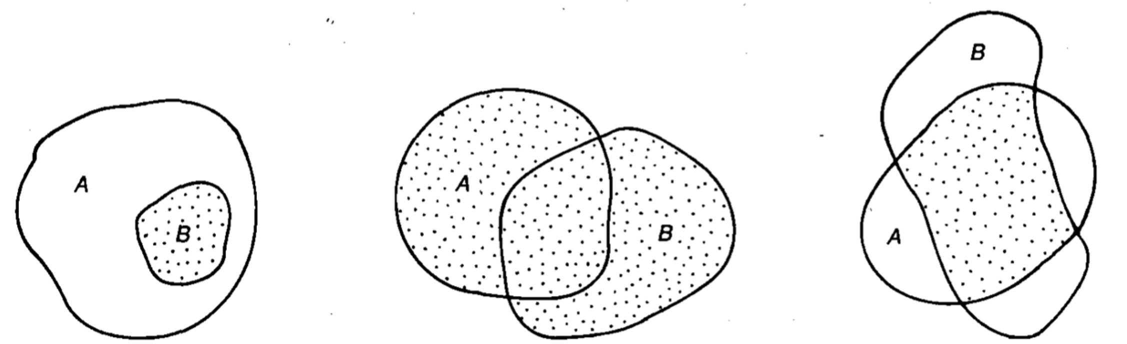
$$\forall x : x \in B \Longrightarrow x \in A .$$

Si noti che $A = B$ se e solo se $B \subseteq A$ e $A \subseteq B$; inoltre $\emptyset$ è contenuto in A (qualunque sia l'insieme A). Un sottoinsieme di A distinto da $\emptyset$ e da A stesso si dice *sottoinsieme proprio*; se B è un sottoinsieme proprio di A scriveremo $B \subset A$ (oppure $A \supset B$).

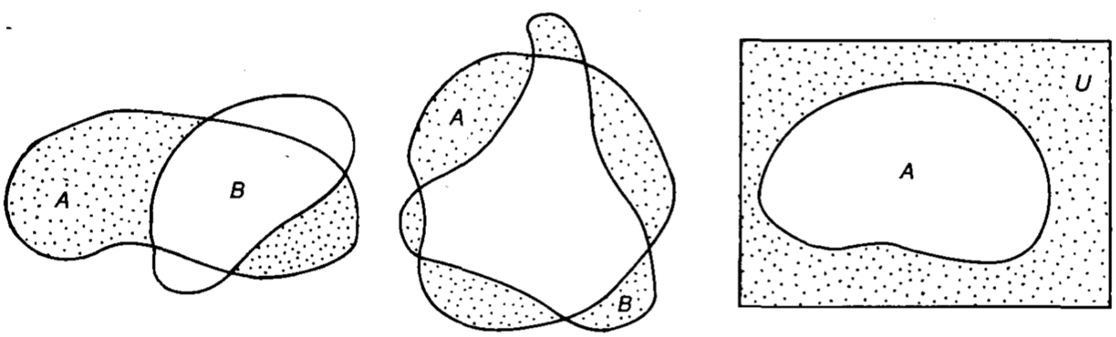
Nota che $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$

$\Downarrow$ (implica)

$A \subseteq C$



a) inclusione: $B \subset A$ *b)* unione: $A \cup B$ *c)* intersezione: $A \cap B$



d) differenza: $A \setminus B$ *e)* differenza simmetrica: $A \triangle B$ *f)* complementazione: $C_U A$

Fig. 1.3

$\|$

U/A

Noi ci interesseremo di sottoinsiemi di $\mathbb{R}$

I più semplici sono gli intervalli

per esempio dati $a < b$ REALI

$$(a,b) := \{ x \in \mathbb{R} \mid a < x < b \}$$

$:=$ per definizione (anche $\stackrel{def}{=}$)

(a,b) tutti i numeri reali compresi fra a e b (esclusi gli estremi)

$$x \in (a,b) \iff a < x < b$$

$\in$ appartiene a

Esempi: $[0,1] \cup [1,7) = [0,7)$

$$(0,1) \cap (2,3) = \emptyset$$

Naturalmente ci sono insiemi più complicati in $\mathbb{R}$

Esercizio:

È vero che $A \cup \{a\} = A$? È vero che $A \cup \{\{a\}\} = A$?

2. Siano A, B, C parti di un dato insieme ambiente U; stabilire quali delle seguenti relazioni sono vere:

a) $A \subseteq C$ e $B \subset C \Longrightarrow A \cup B \subset C$
b) $A \subseteq C$ e $A \subseteq B \Longrightarrow A \subseteq B \cap C$
c) $A \subseteq B \Longrightarrow CA \subseteq CB$.

Le funzioni

mica" rispetto alla 4.1, preferibile dal punto di vista pratico.

Definizione 4.1′ - *Siano X ed Y due insiemi. Si dice* **funzione** *da X in Y una* **corrispondenza univoca** *da X in Y, ovvero una corrispondenza che associa ad ogni elemento* $x \in X$ *uno ed un solo elemento* $y \in Y$.

Esempi