Il teorema di Rolle

Sia $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua

e derivabile in (a,b).

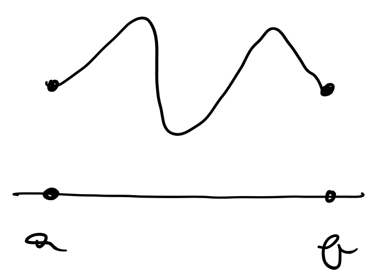
Se $f(a) = f(b)$ allora esiste

un punto $x_0 \in (a,b)$ in cui

$f'(x_0) = 0$.

DIM.

Graficamente



se f vicino ad a

cresce allora per tornare ad avere lo

stesso valore $f(b) = f(a)$ deve decrescere.

nel punto in cui cambia la monotonia

la derivata è NULLA.

Se decresce vicino ad a poi deve crescere.

Se né cresce né decresce è costante e $f'(x) = 0 \ \forall x$

Dimostrazione: f: è continua su un intervallo chiuso e limitato $\Rightarrow$ esiste un punto di MAX e un punto di MIN. (li chiamo x_M e x_m)

se uno dei due punti è INTERNO (cioé o $x_M \in (a,b)$ o $x_m \in (a,b)$ o entrambe)

allora applico il teorema di FERMAT che dice che se ho un min/max $x_0 \in (a,b)$ e f è derivabile in x_0 allora $f'(x_0) = 0$.

Se x_m e x_M sono gli estremi allora

(x esempio $a = x_m$ e $b = x_M$)

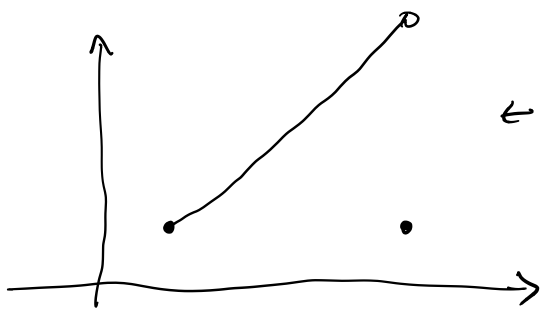
$$f(a) = f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M) = f(b) \quad \forall x$$

ma dato che $f(a) = f(b)$

allora $\quad f(x) = f(b) \quad \forall x \Rightarrow$

$f(x)$ è costante $\Rightarrow f'(x) = 0 \quad \forall x$.

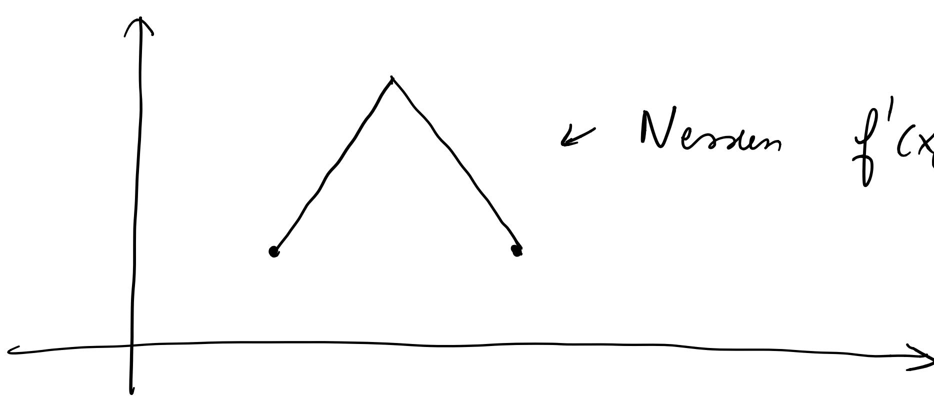
N.B serve che f sia continua in $[a,b]$



← Nessun $f'(x_0)=0$!

f continua in $[a,b)$

serve che f sia derivabile in (a,b)



← Nessun $f'(x_0) = 0$

TEOREMA di LAGRANGE

se $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ è continua in $[a,b]$

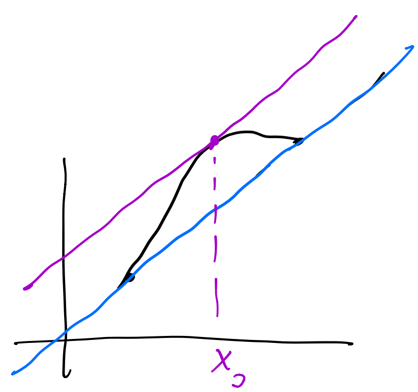
e derivabile in (a,b)

$\exists\ x_0 : \quad f'(x_0) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ è il

coeff. angolare della

RETTA SECANTE



$f'(x_0)$ è il coeff

angolare della tg. in x_0

le due rette sono PARALLELE!

DIM: $\quad g(x) = f(x) - (x-a)\left(\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)$

$g(a) = f(a)$

$g(b) = f(b) - (b-a)\left(\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\right) = f(a)$

$g(x)$ è continua in $[a,b]$ e

derivabile in (a,b) e $g(b) = g(a)$

APPLICO il Teorema di ROLLE

$\exists\, x_0 \in (a,b) \;:\; g'(x_0) = 0$ ma

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{(b-a)}$$ quindi

$$0 = g'(x_0) = f'(x_0) - \frac{f(b) - f(a)}{(b-a)}$$

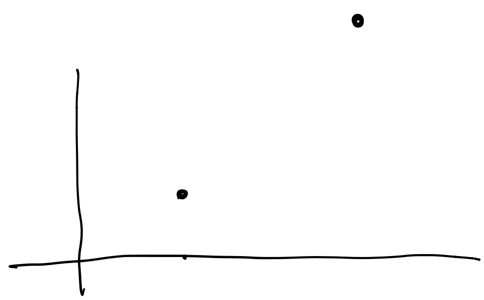
da cui viene $$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$

per esempio

se il grafico

di f passa

per i due punti



la derivata NON può essere SEMPRE < 0 !

COROLLARIO:

se $f : (A,B) \to \mathbb{R}$ è continua e derivabile e $f'(x) = 0 \quad \forall x \in (A,B)$

allora $f(x)$ è costante in (A,B)

DIRE che NON è costante $\Rightarrow \exists\, x_1 \neq x_2$ tali che $f(x_1) \neq f(x_2)$

APPLICO LAGRANGE con $a = x_1$ e $b = x_2$

$\exists\, x_0 \in (x_1, x_2)$ tale che $f'(x_0) = \dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$

ma $\dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \neq 0$ quindi

$\exists\, x_0 ;\ f'(x_0) \neq 0$ CONTRADDICENDO L'IPOTESI $f'(x) = 0 \quad \forall x \in (A,B)$

CARATTERIZZAZIONE DELLE FUNZIONI MONOTONE

① se $f : (A,B) \to \mathbb{R}$ è continua

e $f'(x) \geq 0$ per ogni $x \in (A,B)$

allora $f(x)$ è crescente cioè se $x_1 > x_2$

$\Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

DIM. se la tesi è falsa $\Rightarrow$ è falsa l'ipotesi

se $f'(x)$ NON è crescente

allora (dato che f NON è crescente)

$\exists \; x_1 > x_1$ t.c. $f(x_1) < f(x_2)$ (NOTA. il minore stretto)

ma applicando il teorema di Lagrange

con $a = x_1$ e $b = x_2$

$$\exists x_0 \in (x_1, x_2) \; : \; f'(x_0) = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$$

ciò che contraddice l'ipotesi $f'(x) \geq 0$
$\forall\ x \in (A,B)$

② se $f'(x) > 0$ per ogni $x \in (A,B)$

allora f è STRETTAMENTE CRESCENTE

(la dim è uguale a ①)

③ se f è continua derivabile e

CRESCENTE in (A,B) allora $f'(x) \geq 0$
$\forall\ x \in (A,B)$

DIM (come per il teorema di Fermat)

$$f'(x) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \qquad 1)$$

se $h > 0$ $\quad x+h > x \Rightarrow f(x+h) \geq f(x)$

quindi $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} \geq 0$

(allo stesso modo se $h<0$ $x+h<x$

$\Rightarrow f(x+h) \leq f(x)$ e

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \geq 0 \quad \left(\begin{array}{c}\text{rapporto di 2} \\ \text{numeri } <0\end{array}\right)$$

quindi PER IL TEOREMA della permanenza del segno

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \geq 0$$

Quindi per esempio

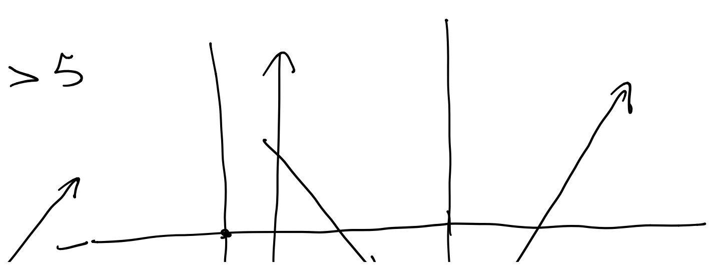
$$f(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 - 5x + 2$$

$$f'(x) = x^2 - 4x - 5$$

$$2 \pm \sqrt{4+5} \quad \begin{array}{l} 2+3 \\ 2-3 \end{array}$$

$f'(x) < 0$ per

$x < -1$ e $x > 5$



-1 è un massimo locale

5 è un min locale

$f(-1) = -\frac{1}{3} - 2 + 5 + 2 > 0$

$f(5) = \frac{125}{3} - 2 \cdot 25 - 25 + 2 < 0 \mid > 0$

$\left(\frac{5}{3} - 3\right) \cdot 25 + 2$

$-\frac{4}{3} \cdot 25 + \frac{6}{3}$