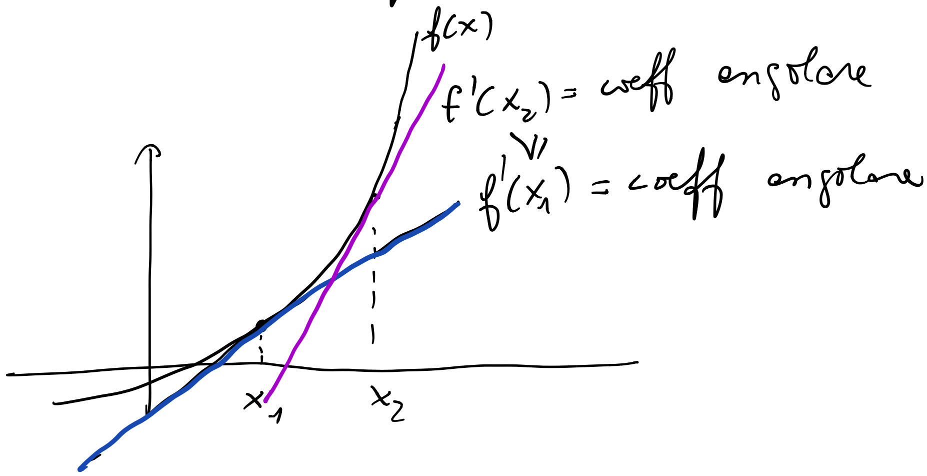
le derivate seconde

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile e con la derivata prima $f'(x)$ CONTINUA posso calcolare (se esiste) la derivata della derivata $f''(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h}$

Significato geometrico:

CONVESSITÀ: se la derivata seconda è positiva $f''(x) > 0$ in (a, b) vuol dire che la derivata prima $f'(x)$ è STRETTAMENTE CRESCENTE



Una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è

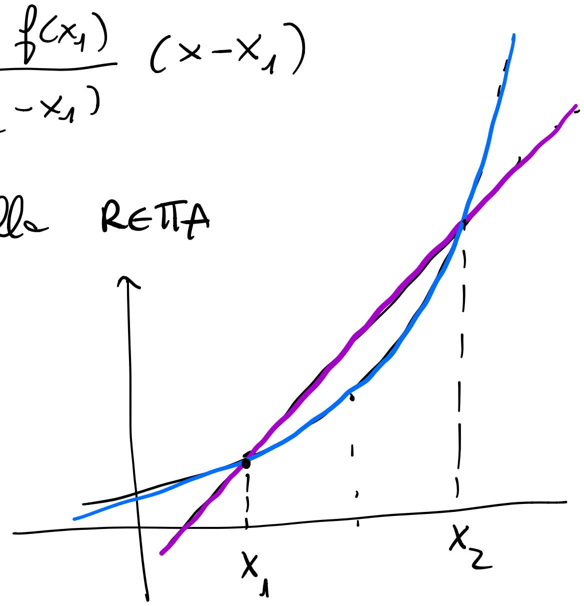
CONVESSA se $x_1 < x_2$

$\forall \; x_1 \le x \le x_2$

$$f(x) \le f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{(x_2 - x_1)} (x - x_1)$$

in viola il grafico della RETTA

$$y = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{(x_2 - x_1)} (x - x_1)$$



in blu il grafico

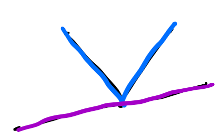
della funzione.

$$y = f(x)$$

CONVESSA $\Longleftrightarrow$ $f(x)$ sta sotto alla SECANTE!

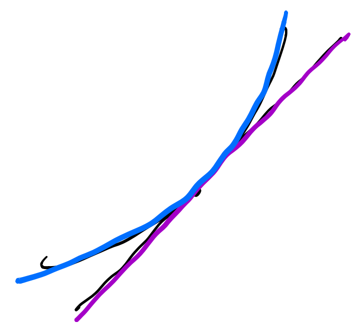
se f è CONVESSA $\Rightarrow$ $\forall x_0$ c'è una

retta di APPOGGIO per $(x_0, f(x_0))$



La derivata è una "retta d'appoggio"

f(x) sta sopra alla retta tangente



$$\text{(49.1)} \qquad f \text{ convessa in } [a, b] \iff \begin{cases} f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0), \\ \forall\, x, x_0 \in [a, b]; \end{cases}$$

f è convessa e derivabile

$f'(x)$ è CRESCENTE.

se f è CONVESSA derivabile e esiste

la DERIVATA SECONDA $f''(x) \geq 0$

— · — · — · — · — · — · — · —

Studio del grafico di una funzione.

Data una funzione f disegnamo un

GRAFICO APPROX

ESEMPIO

$$f(x) := \ln\left(x^2 + 3x - 4\right)$$

① Si determina il DOMINIO di DEFINIZIONE. Si vede se f è PARI o DISPARI e se è periodica

Nell'esempio $x^2+3x-4>0$

cioè $(x-1)(x+4)>0 \Rightarrow$

$D=(-\infty,-4)\cup(1,\infty)$ Non è né pari né dispari

NÈ PERIODICA

② Si determinano i limiti a $\pm\infty$ (se sono punti d'ACCUMULAZIONE per il DOMINIO)

Nell'ESEMPIO $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=+\infty$

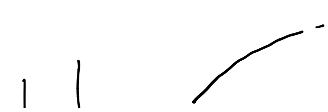
OPTIONAL: si trova l'andamento ASINTOTICO

Nell'esempio $f(x)\sim 2\ln(|x|)$ a $x\to\pm\infty$

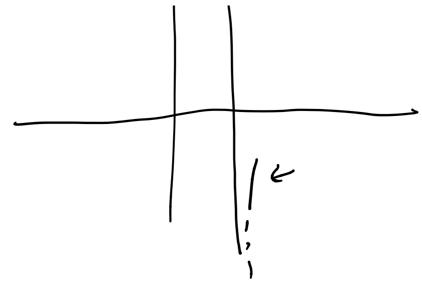
$$f(x)=\ln(x^2+3x-4)\sim\ln(x^2)=2\ln(|x|)$$

③ Si determinano i limiti ai punti di accumulazione del dominio

Nell'esempio $\{-4\}$ e $\{1\}$ $\lim_{x\to1^+} f(x)=-\infty$



$$\lim_{x \to -4^-} f(x) = -\infty$$



④ Si discute la CONTINUITÀ:

Nell'esempio $f(x)$ è COMPOSIZIONE di funzioni elementari $\Rightarrow$ è CONTINUA

⑤ Si calcola la funzione in alcuni punti (per esempio $x = 0$)

[calcolata in $x = 2$]

⑥ Si studia il SEGNO DELLA FUNZIONE

Non è detto che questo passo si possa svolgere esplicitamente

Nell'esempio: $\ln(x^2+3x-4) \geq 0$

$\Rightarrow x^2+3x-4 \geq 1$ $\qquad \dfrac{-3 \pm \sqrt{9+20}}{2}$ $\quad \dfrac{-3-\sqrt{29}}{2}$, $\quad \dfrac{-3+\sqrt{29}}{2}$

$$f(x) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \left\{x \leq \frac{-3-\sqrt{25}}{2}\right\} \cup \left\{x \geq \frac{-3+\sqrt{25}}{2}\right\}$$

⑦ Si calcola la derivata prima

se ne studiano gli zeri ed il segno

Nell' esempio $f'(x) = \dfrac{2x+3}{x^2+3x-4}$ per $x \in D$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = -\frac{3}{2}$ NON è nel DOMINIO

Voglio studiare il segno di $f'(x)$ SOLO nel DOMINIO D

in D

per costruzione $x^2+3x-4 > 0$

quindi $f'(x) > 0$ in $D \Rightarrow x \in D$ e $x > -\frac{3}{2}$

$\Rightarrow \quad x \geq 1$. Allo stesso modo

$f'(x) < 0 \Rightarrow x \leq -4$

⑧ OPTIONAL: Studio la derivata seconda

i suoi zeri ed il suo segno

Nell' esempio $f''(x) = \frac{2}{x^2+3x-4} - \frac{(2x+3)(2x+3)}{(x^2+3x-4)^2}$

$$= \frac{2(x^2+3x-4) - (2x+3)^2}{(x^2+3x-4)^2}$$

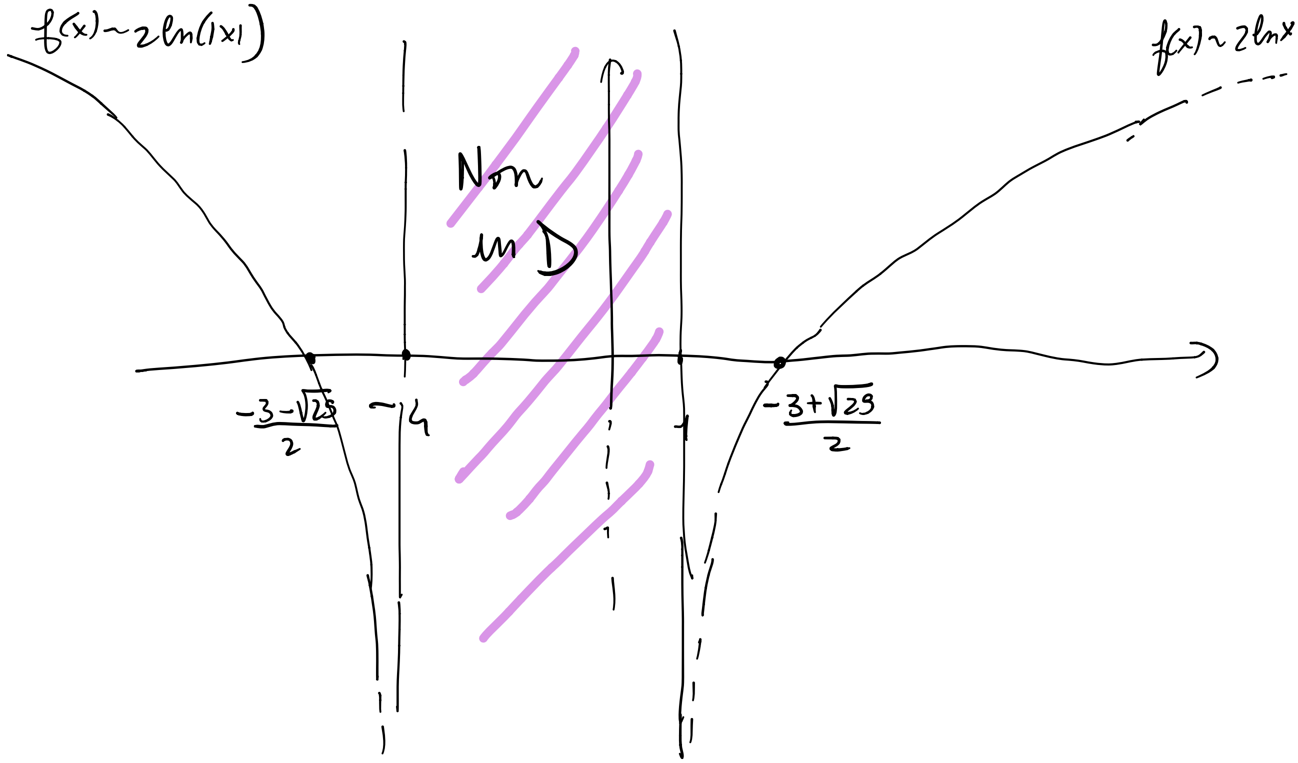
$$= \frac{2x^2+6x-8-(4x^2+9+12x)}{(x^2+3x-4)^2}$$

$$= \frac{-2x^2-6x-17}{(x^2+3x-4)^2}$$

$-2x^2-6x-17 = 0$ il $\Delta = b^2-4ac < 0$

Nessuna soluzione

$f''(x) < 0 \quad \forall x$



Disegnare le funzioni periodiche

Esercizi: $f(x) = \sqrt{1 - 2\sin^2(x)}$

$f(x+2k\pi) = f(x)$ Basta disegnare

$f(x)$ in $[0, 2\pi)$ o $(-\pi, \pi)$

Non possono esistere i limiti a $\pm\infty$

NOTA BENE. $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ NON è periodica!

Esercizio $f(x) = x e^{\frac{1}{x}}$

$$f(x) = \frac{2x-1}{x e^{x}}$$

$$f(x) = \frac{3-x^2}{(x-2)(x+1)}$$