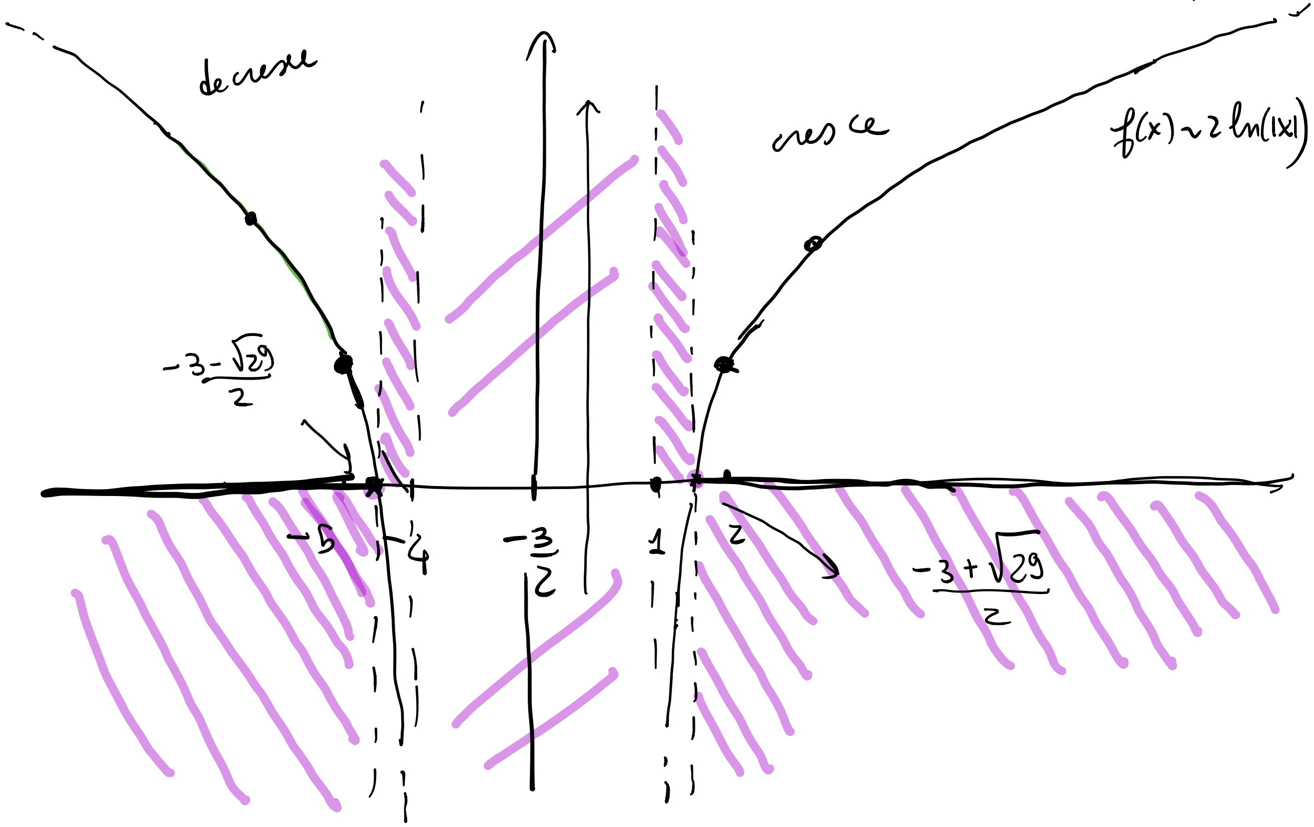
Continuiamo con $f(x) = \ln(x^2+3x-4)$



Studiare il segno di $f(x)$

$x: \quad f(x) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \ln(x^2+3x-4) \geq 0$

$\ln(x^2+3x-4) \geq \ln(1)$ $\qquad \boxed{x^2+3x-4 \geq 1}$

$x^2+3x-5 \geq 0$

$$x_{1,2} = \begin{cases} \frac{-3-\sqrt{29}}{2} \\ \frac{-3+\sqrt{29}}{2} \end{cases}$$

$$f(x) \geq 0 \quad \left(\left\{ x \leq -\frac{3-\sqrt{29}}{2} \right\} \cup \left\{ x \geq -\frac{3+\sqrt{29}}{2} \right\} \right.$$

5) Calcolo $f'(x)$ e ne studio gli zeri ed il segno

$$f(x) = \ln(x^2+3x-4)$$

$$f'(x) = \frac{1}{x^2+3x-4}(2x+3)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2x+3=0 \qquad x_0 = -\frac{3}{2}$$

NON è NEL DOMINIO

$f'(x) \geq 0$ e $x \in D$

$$\frac{(2x+3}{x^2+3x-4} \geq 0 \quad \text{per } x \in D$$

$$f'(x) \geq 0 \text{ con } x \in D \Rightarrow 2x+3 \geq 0$$

$f(x)$ è crescente in D per $x \geq -\frac{3}{2}$

$$D \cap [-\tfrac{3}{2}, \infty) = (1, \infty)$$

$$f'(x) = \frac{2x+3}{x^2+3x-4}$$

$$f''(x) = \frac{2}{x^2+3x-4} - \frac{(2x+3)(2x+3)}{(x^2+3x-4)^2}$$

$$= \frac{2(x^2+3x-4) - 4x^2 - 9 - 12x)}{(x^2+3x-4)^2}$$

$$= \frac{-2x^2-6x-17}{(x^2+3x-4)^2}$$

$f''(x) = -2x^2 - 6x - 17 \geq 0 \Rightarrow 2x^2 + 6x + 17 \leq 0$

calcolo il $\Delta = 36 - 4 \cdot 2 \cdot 17 < 0$

quindi $2x^2+16x+17 > 0$ sempre e $f''(x) < 0$ sempre

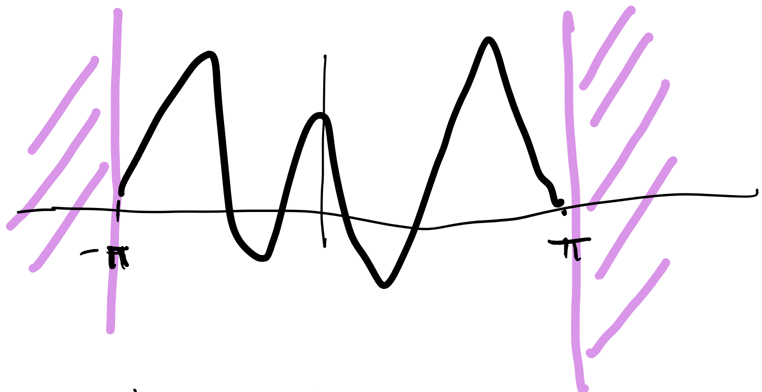
$f(x)$ è SEMPRE CONCAVA.

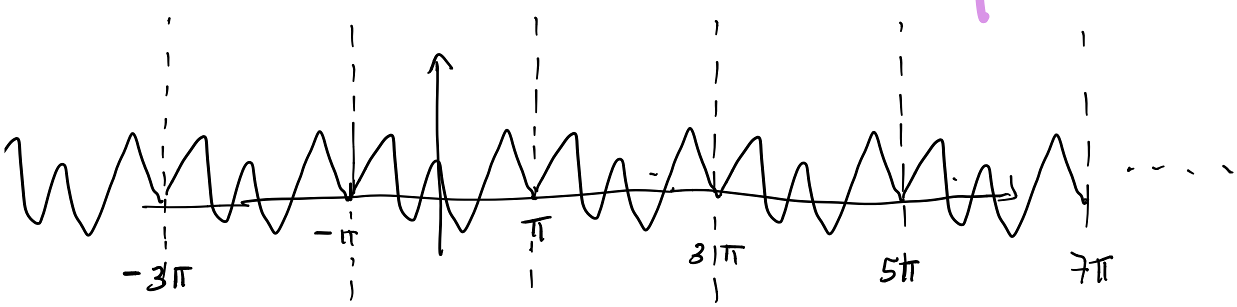
Studiamo una funzione periodica.

Studio la funzione su un periodo

(x esempio $[-\pi, \pi]$) poi ripeto il grafico

Esempio:





Esempio

$$f(x) = \sqrt{1 - 2\sin^2(x)}$$

① $f(x)$ è periodica infatti

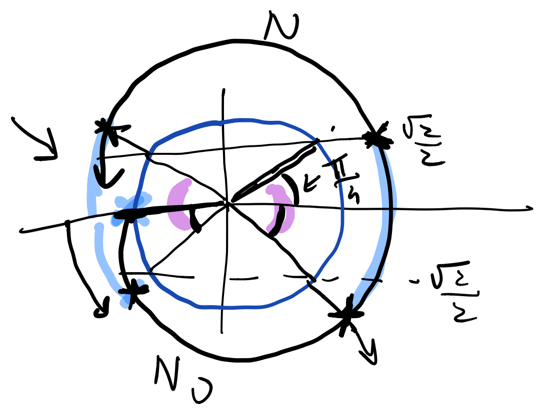
$$f(x+2\pi) = f(x) \Rightarrow f(x+2k\pi) = f(x)$$

Disegno $f(x)$ in $[-\pi, \pi]$

① Dominio

$D := \{ x \in [-\pi, \pi] : 1 - 2\sin^2 x \geq 0 \}$

$1 - 2\sin^2 x \geq 0$



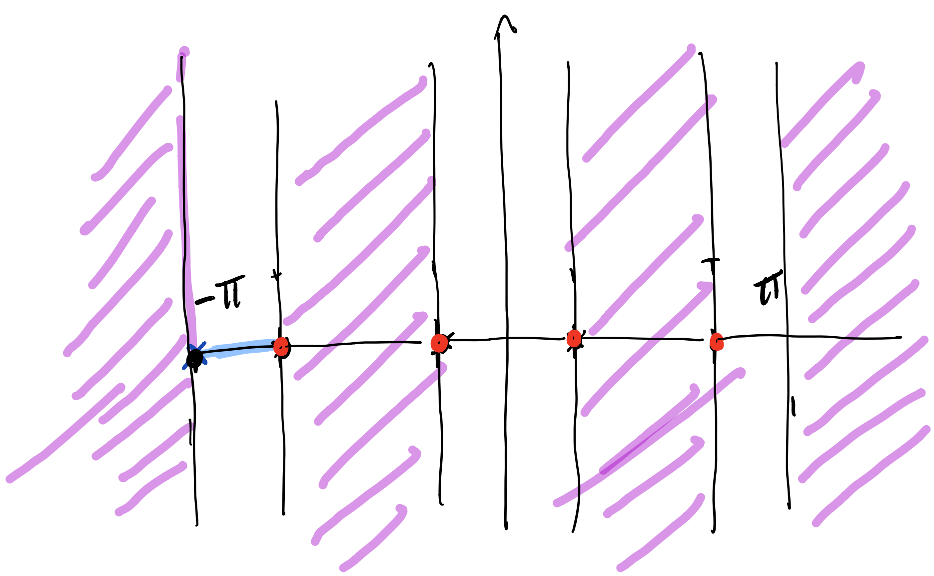
$\sin^2 x \leq \frac{1}{2}$

$\Updownarrow$

$-\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \sin x \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$

equivale a chiedere:

$-\pi \leq x \leq -\pi + \frac{\pi}{4} \cup -\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4} \cup \pi - \frac{\pi}{4} \leq x \leq \pi$



Nei punti $-\pi+\frac{\pi}{4}$, $-\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{4}$, $\pi-\frac{\pi}{4}$, $f(x)=0$

in rosso.

② $f(-x) = \sqrt{1-2\sin^2(-x)} = \sqrt{1-2(-\sin x)^2}$

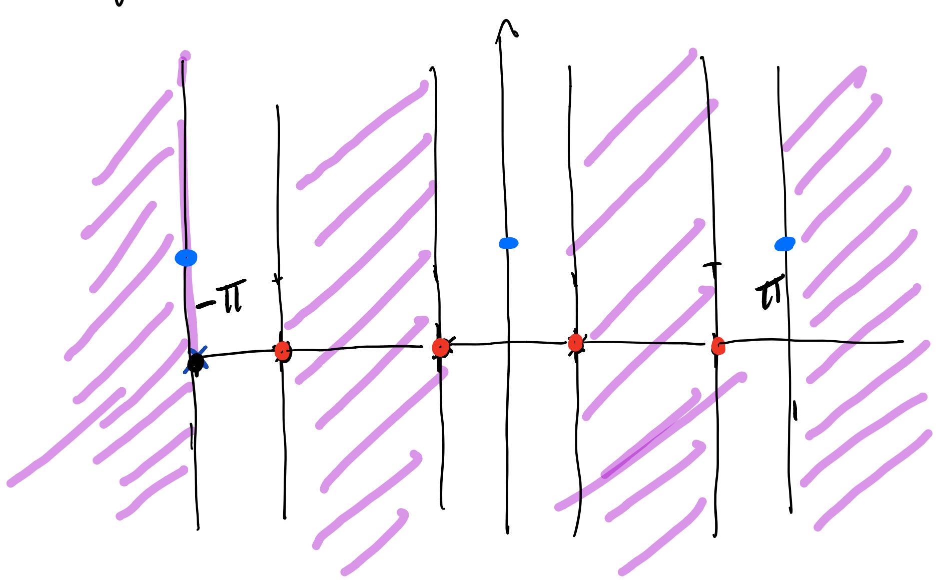
$= \sqrt{1-2\sin^2 x} = f(x)$

La funzione è pari!

Nei punti di accumulazione la funzione è continua

$\lim_{x\to-\pi} f(x) = \sqrt{1-2(\sin(-\pi))^2} = 1$

Inoltre $f(x)\geq 0$ $\forall x\in D$; $f(0)=1$



$$f(x) = \sqrt{1 - 2\sin^2(x)}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(1-2\sin^2 x\right)^{-\frac{1}{2}}\left(-2\cdot 2\sin x\cos x\right)$$

$$= -2\left(1-2\sin^2 x\right)^{-\frac{1}{2}}\sin x\cos x$$

$$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-2\sin^2 x}}\sin(2x)$$

quindi $f'(x) = 0 \iff \sin(2x) = 0$

quindi $x = \frac{k\pi}{2}$ (cioè $k=-2$ $x=-\pi$

$k=-1$, $x=-\frac{\pi}{2}$; $k=0$, $x=0$; $k=1$, $x=\frac{\pi}{2}$

e $k=2$, $x=\pi$)

In tutti questi punti $f(x) = 1$

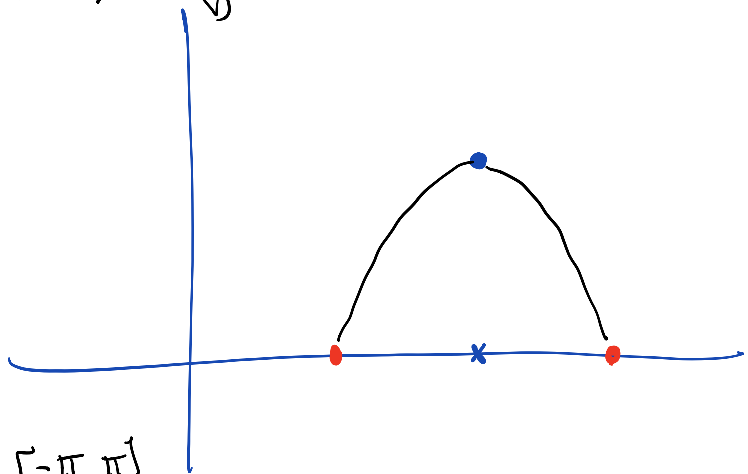
Poi dovrei studiare il segno della derivata

però dato che in ciascun intervallo del

Dominio c'è un UNICO punto critico

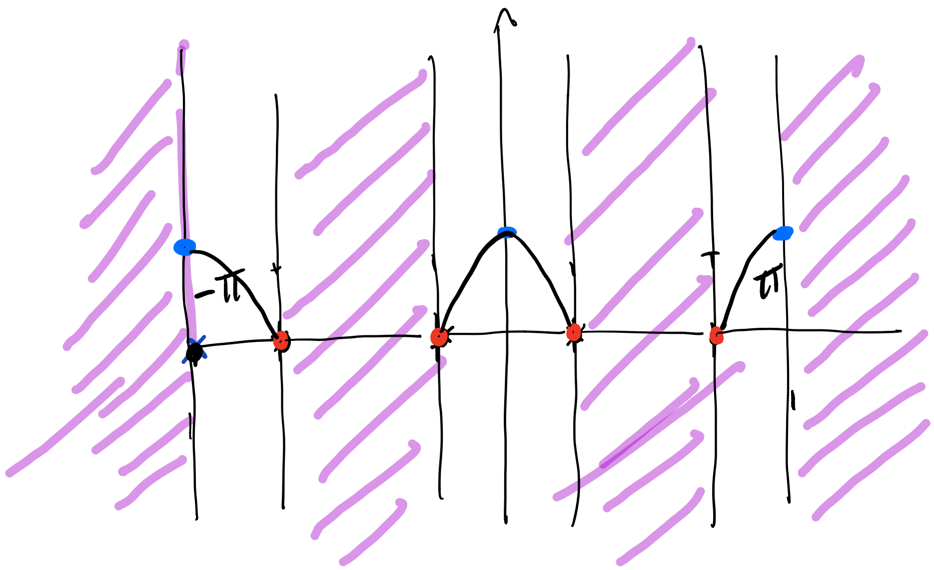
il grafico deve essere:

della forma:



in ciascun intervallo.

Grafico in $[-\pi, \pi]$



Nota bene: $1 - 2\sin^2 x = \cos^2 x - \sin^2 x$

$= \cos(2x) \implies f(x) = \sqrt{\cos(2x)}$

(notare questo avrebbe semplificato i conti)

Altro esempio:

$$f(x) = x e^{\frac{1}{x}} \qquad D = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}$$

$$f(-x) = -x e^{\frac{1}{-x}} = -x e^{-\frac{1}{x}} \neq f(x)$$

$$\neq -f(x)$$

Ne pari ne dispari

① Limiti ai punti di accumulazione

$\{0\}$, $\{+\infty, -\infty\}$

$$\lim_{x \to +\infty} x e^{\frac{1}{x}} = +\infty \cdot e^{0} = +\infty \cdot 1 = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} x e^{\frac{1}{x}} = -\infty \qquad \boxed{x e^{\frac{1}{x}} \sim x} \quad \text{per } x \to \infty$$

se $x \to +\infty$ $\quad \frac{1}{x} \to 0^+ \quad e^{\frac{1}{x}} \to 1$

pongo $y = \frac{1}{x}$

$$e^{\frac{1}{x}} = e^{y} \sim 1 + y = 1 + \frac{1}{x} \quad \text{per } x \to \pm\infty$$

$$x e^{\frac{1}{x}} \sim x\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \boxed{x+1}$$

$$\lim_{x \to 0^-} x e^{\frac{1}{x}} = 0^- \cdot e^{\frac{1}{0^-}} = 0^- \cdot e^{-\infty} = 0$$

$$\lim_{x \to 0^+} x e^{\frac{1}{x}} = 0^+ \cdot e^{\frac{1}{0^+}} = 0^+ \cdot \infty$$

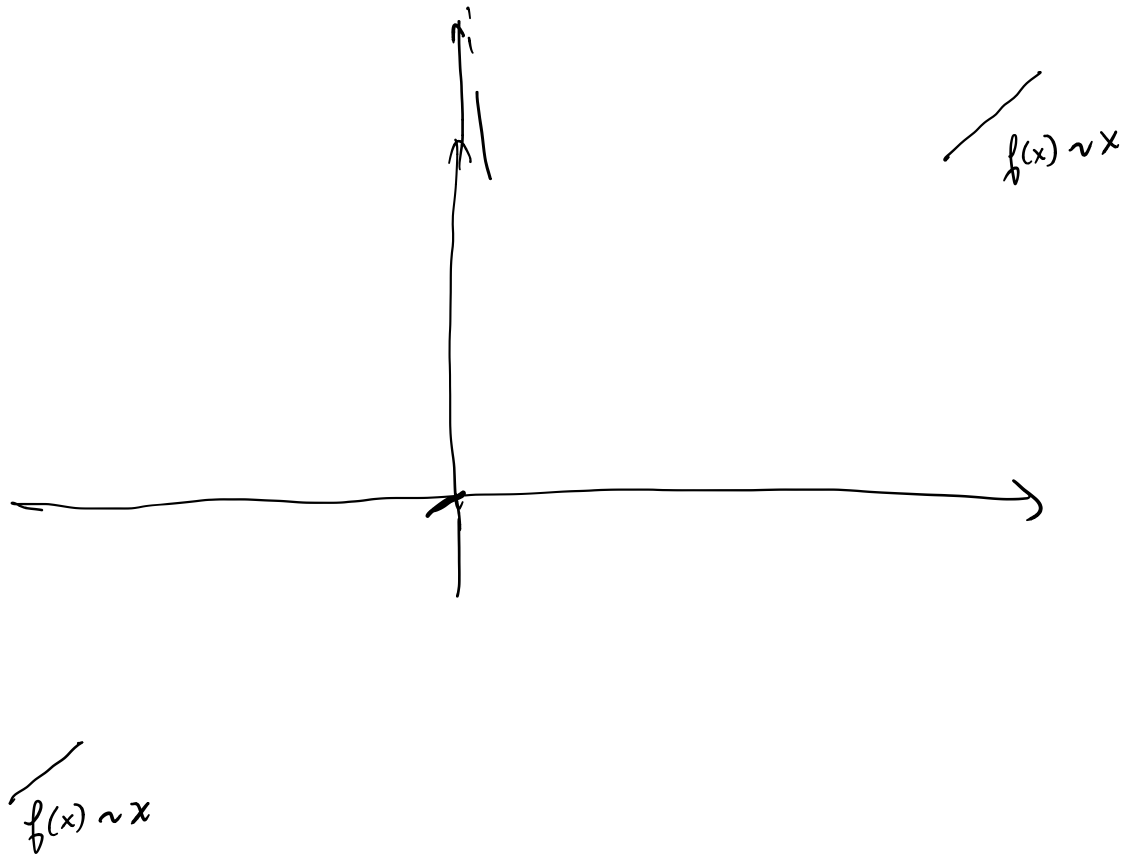
se $x \to 0^+$ $\quad \frac{1}{x} \to +\infty$

ricordo che $y \ll e^{y}$ se $y \to \infty$

$$y = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{1}{y}$$

$$\lim_{x \to 0^+} x e^{\frac{1}{x}} = \lim_{y \to +\infty} \frac{e^{y}}{y} =$$

$$= \frac{1}{\lim_{y \to \infty} \frac{y}{e^{y}}} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$



si continua nella prossima lezione!