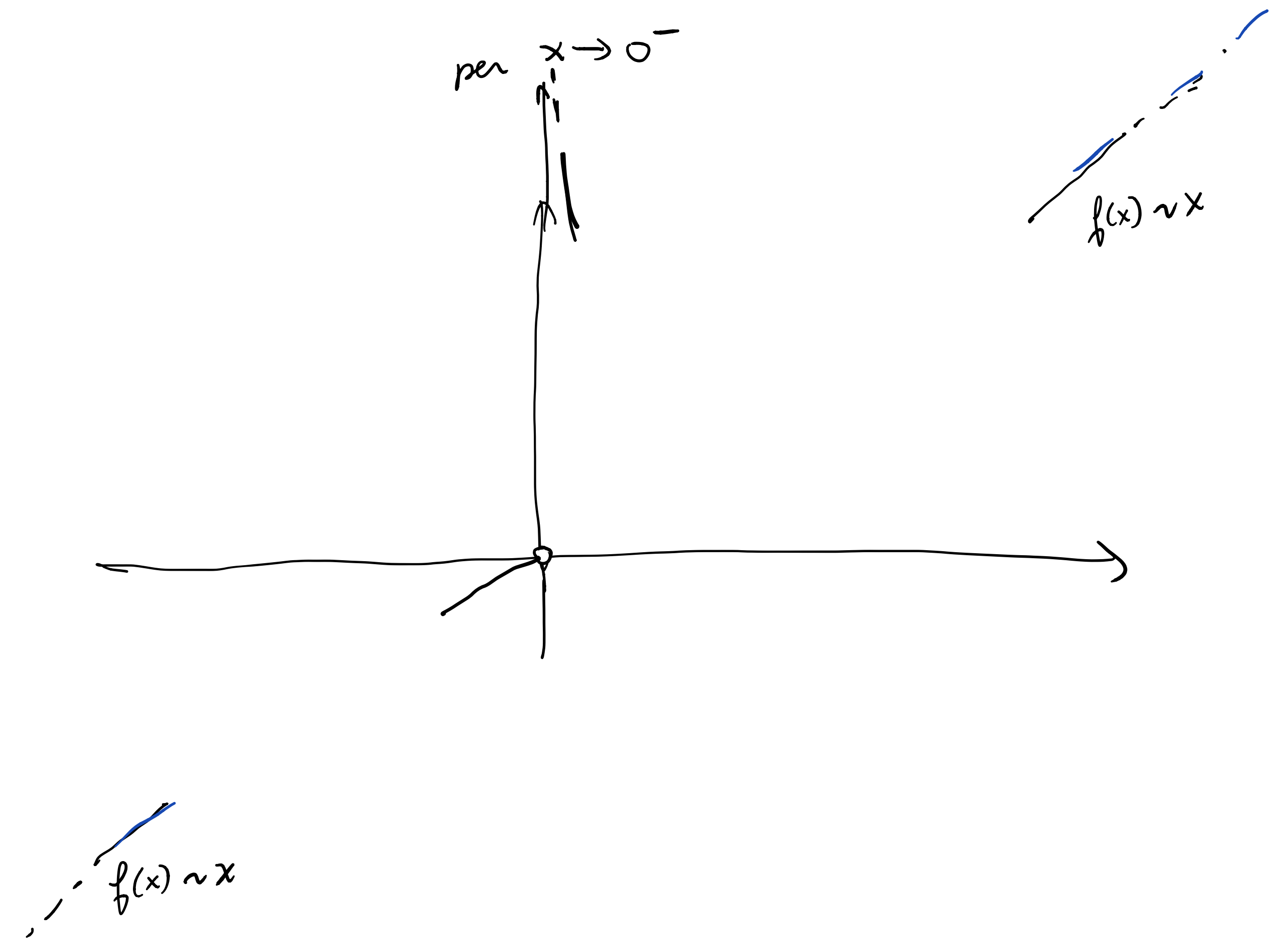
$$f(x) = x e^{\frac{1}{x}}$$

avevamo visto che

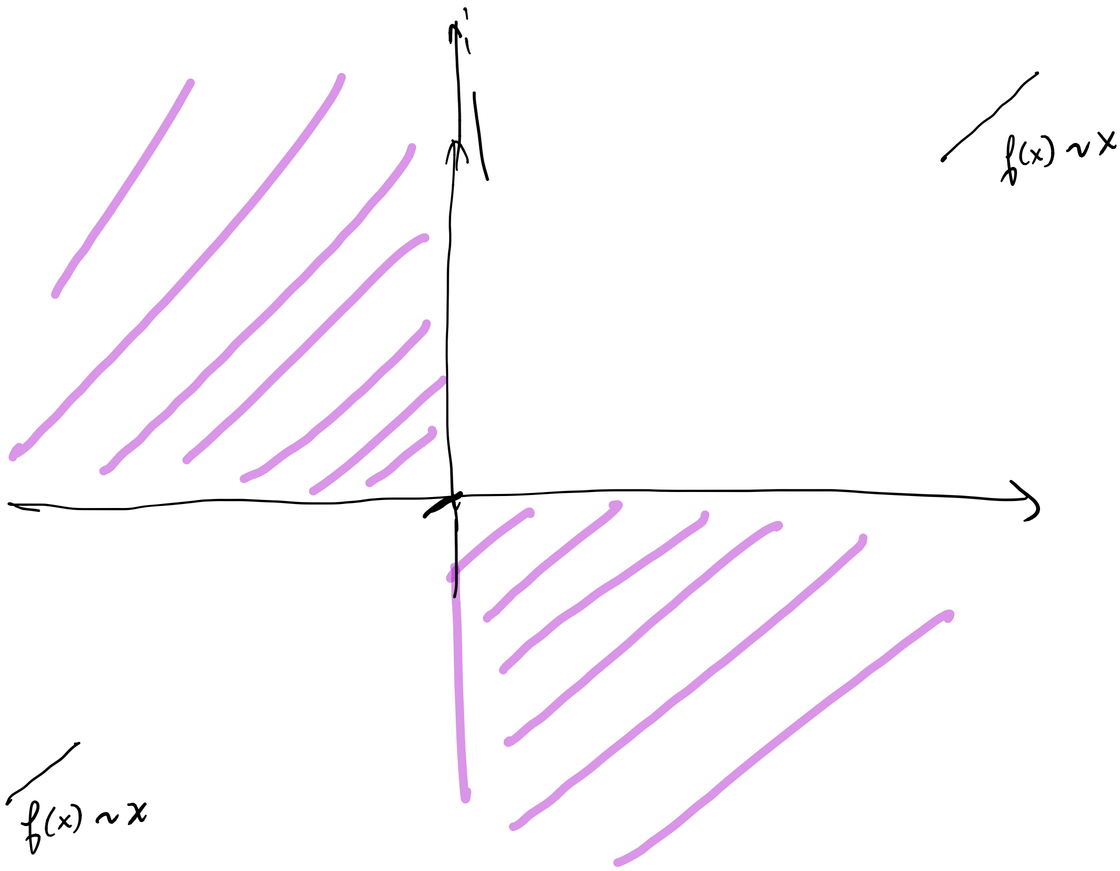
$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$



Studio il segno $\Rightarrow$ $f(x) \geq 0$

dato che $e^{\frac{1}{x}} > 0$ $\Rightarrow$ $f(x) > 0$ se $x > 0$



Nota: ci deve essere ALMENO un punto critico $x_0 > 0$.

Calcolo la derivata.

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x}} + x \cdot e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = e^{\frac{1}{x}}\left(1 - \frac{1}{x}\right)$$

Trovo i punti critici $f'(x) = 0$

$\Leftrightarrow \quad x = 1$

1 solo punto critico

(che DEVE essere un MINIMO)

Monotonia:

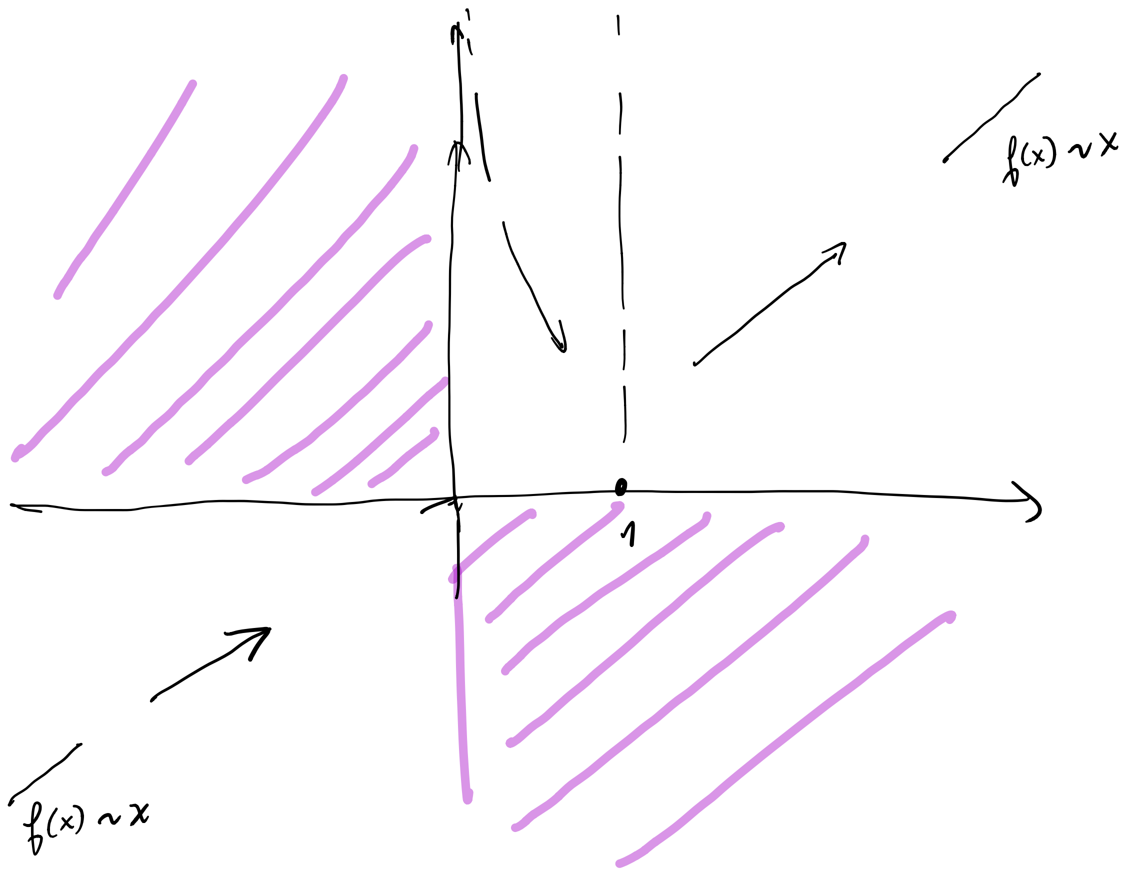
$f(x)$ cresce se $\left(1-\frac{1}{x}\right)>0$

cioé se $\frac{x-1}{x}>0$

quindi $f'(x)>0$

$\{x<0\} \cup \{x>1\}$

	0		1		
$- - - - -$		$+ + +$		$+ + +$	D
$- - - -$		$- -$		$+ + + +$	N
$+$		$-$		$+$	

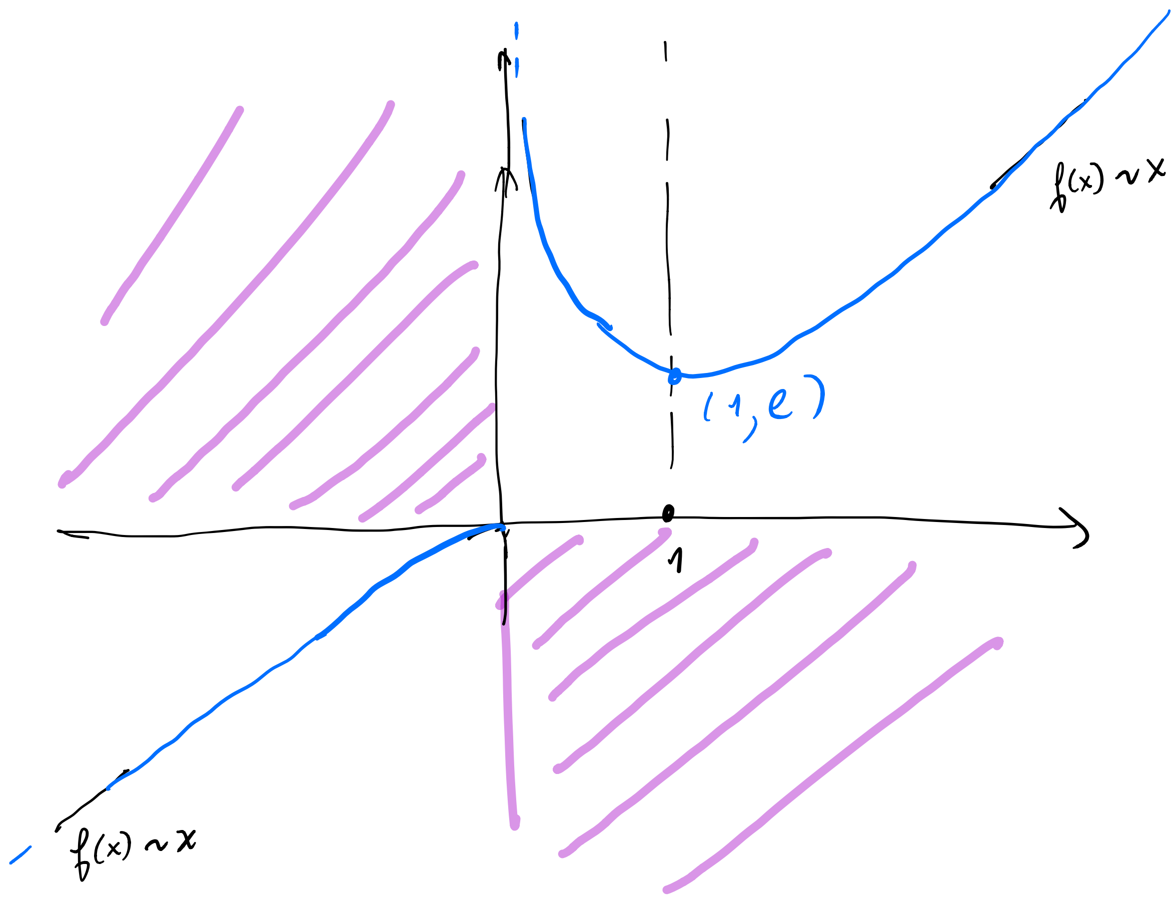


Derivata seconda : $f'(x) = e^{\frac{1}{x}}\left(1-\frac{1}{x}\right)$

$$f''(x) = e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2} + e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)\left(1-\frac{1}{x}\right)$$

$$= + \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3}$$

quindi $f''(x) > 0$ se $x > 0$



Notare che $\lim_{x \to 0^-} f'(x) = 0$

e anche $\lim_{x \to 0^-} f''(x) = 0$

— — — — — — — — —

Il teorema di l'Hospital.

È un teorema che permette di calcolare il limite del rapporto di due funzioni quando questo risulti una FORMA INDETERM.

TEOREMA DI L'HÔPITAL. ① *Siano* f(x), g(x) *due funzioni derivabili in* $[a, b] - \{x_0\}$ *e tali che*

(53.4) $$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0.$$

② *Se* $g'(x) \neq 0$ *per ogni* $x \in [a, b] - \{x_0\}$ *e se esiste il limite*

(53.5) ③ $\exists \to$ $$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

allora esiste anche il limite per $x \to x_0$ *dal rapporto* $f(x)/g(x)$ *e si ha*

(53.6) $$\boxed{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}}.$$

Inoltre il teorema vale anche in ognuna delle seguenti situazioni:

(53.7) *si considerano limiti destri* ($x \to x_0^+$) *o sinistri* ($x \to x_0^-$);

(53.8) *in luogo dell'ipotesi* (53.4) *si suppone che*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = +\infty,$$

oppure $-\infty$ *(anzi, è sufficiente che, per* $x \to x_0$, *la sola funzione* g(x) *diverga a* $+\infty$ *o a* $-\infty$);

(53.9) f(x), g(x) *sono derivabili in intervalli illimitati e si considera il limite per* $x \to +\infty$, *oppure per* $x \to -\infty$.

Esempio $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$

$f(x) = \operatorname{sen} x$; $g(x) = x$; $x_0 = 0$

$f'(x) = \cos x$; $g'(x) = 1$

il limite $\lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to 0} \cos x = 1$

quindi $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

Esempio 2. $\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x}$

$f(x) = e^x$; $g(x) = x$ $x_0 = +\infty$

$f'(x) = e^x$ $g'(x) = 1$

$\exists$ il limite $\lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \infty$

quindi $\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x} = \infty$

Si può iterare $e^x \to \infty$ e $x^2 \to \infty$ quindi

$$\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^2} = \lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{2x}$$

ma $e^x \to \infty$ e $2x \to \infty$ per $x \to \infty$

quindi posso applicare il teorema de l'Hospital

$$\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^2} = \lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{2x} = \lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{2} = \infty$$

Attenzione è importante che $\frac{f}{g} \to \frac{0}{0}$ oppure $\frac{\infty}{\infty}$

altrimenti NON FUNZIONA

$$\lim_{x \to 0} \frac{1+x}{2+x} = \frac{1}{2}$$

ma $\lim_{x \to 0} \frac{1}{1} = 1$

Traccia di dimostrazione:

Supponiamo che $g(x)$ e $f(x)$ siano continue in x_0 e $g(x_0) = f(x_0) = 0$.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}{\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}} = \frac{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}{\lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

Ovviamente funziona solo se $f'(x_0)$ e $g'(x_0)$ esistono finite

Applicazioni:

$$\lim_{x \to 0^+} x^3 \ln(x) = - \lim_{x \to 0^+} \frac{-\ln(x)}{\frac{1}{x^3}}$$

$f(x) = -\ln x \longrightarrow \infty$ $\qquad f'(x) = -\frac{1}{x}$

$g(x) = \frac{1}{x^3} \longrightarrow \infty$ $\qquad g'(x) = -\frac{3}{x^4}$

$$- \lim_{x \to 0^+} \frac{-\frac{1}{x}}{-\frac{3}{x^4}} = - \lim_{x \to 0^+} \frac{x^3}{3} = 0$$

[si potrebbe anche notare che se $x \longrightarrow 0^+$

$y = \frac{1}{x} \to +\infty$ $\qquad \lim_{x \to 0^+} x^3 \ln x = - \lim_{y \to \infty} \frac{\ln y}{y^3}$

e poi ripetere il Teorema de l'Hospital in $x_0 = \infty$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x - x}{x^3} \overset{\text{se esiste}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{3x^2} \overset{\text{se esiste}}{=}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-\operatorname{sen} x}{6x} = -\frac{1}{6}$$

Attenzione in un limite tipo

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x^5 \operatorname{tg}(x^2))}{\operatorname{arcsen}(3x^7 + x^9)} = \lim_{x \to 0} \frac{x^7}{3x^7}$$

non è una buona idea fare de l'Hospital

Molto meglio usare le formule asintotiche

$\operatorname{tg}(y) \sim y$ per $\to 0$ $\quad$ $\operatorname{sen}(y) \sim y$ per $\to 0$

$$\operatorname{sen}(x^5 \operatorname{tg}(x^2)) \sim x^5 \operatorname{tg}(x^2) \sim x^5 \cdot x^2$$

$$\operatorname{arcsen}(3x^7 + x^9) \sim 3x^7 + x^9 \sim 3x^7$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x^5 \operatorname{tg}(x^2))}{\operatorname{arcsen}(3x^7 + x^9)} = \lim_{x \to 0} \frac{x^7}{3x^7} = \frac{1}{3}$$