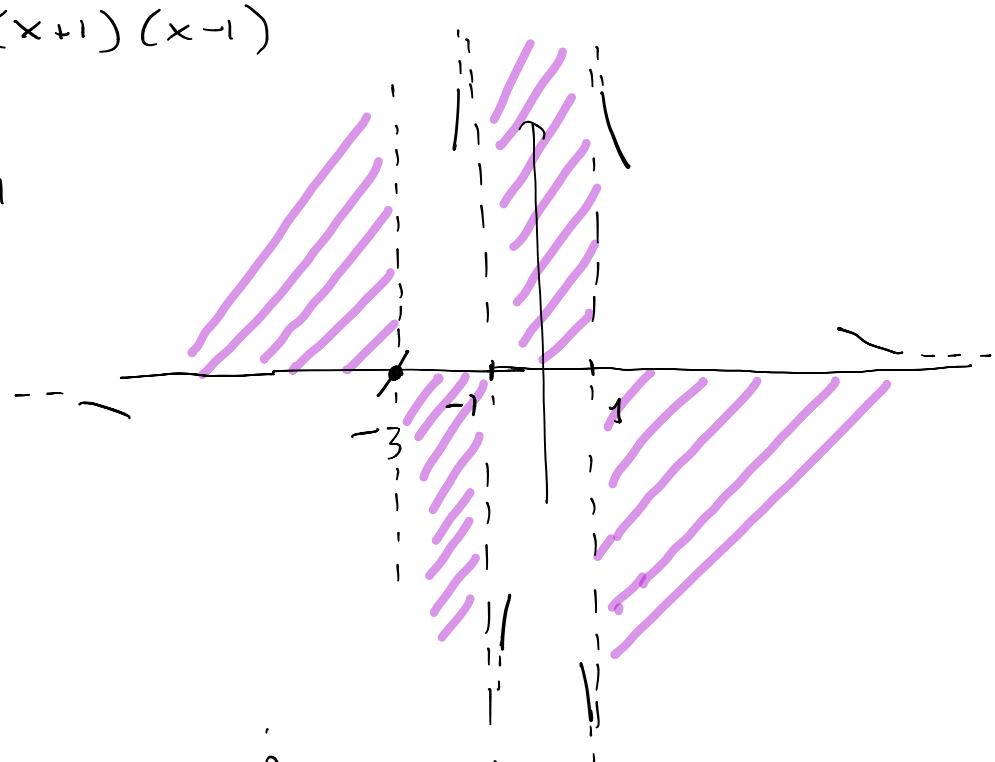
$$f(x) = \frac{x+3}{(x+1)(x-1)}$$

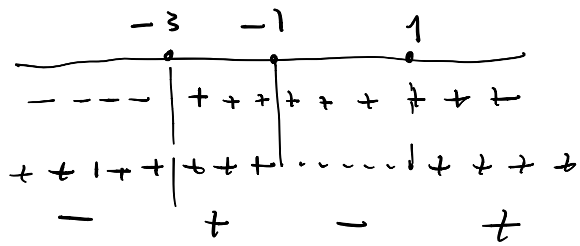
$x \neq \pm 1$



Studio prima il segno:

$f(x) > 0$

$f(x) = 0 \Rightarrow x = -3$



Studio il limite ai punti di accumulazione

$-\infty, -1, 1, +\infty$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0^-$; $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0^+$

$\lim_{x \to -1^-} f(x) = +\infty$ (infatti ho un asintoto verticale e so che $f(x) > 0$ per $x < -1$

$\lim_{x \to -1^+} f(x) = -\infty$ (stesso motivo)

$\lim_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$

Calcolo $f'(x)$

$$f(x) = \frac{x+3}{(x+1)(x-1)}$$

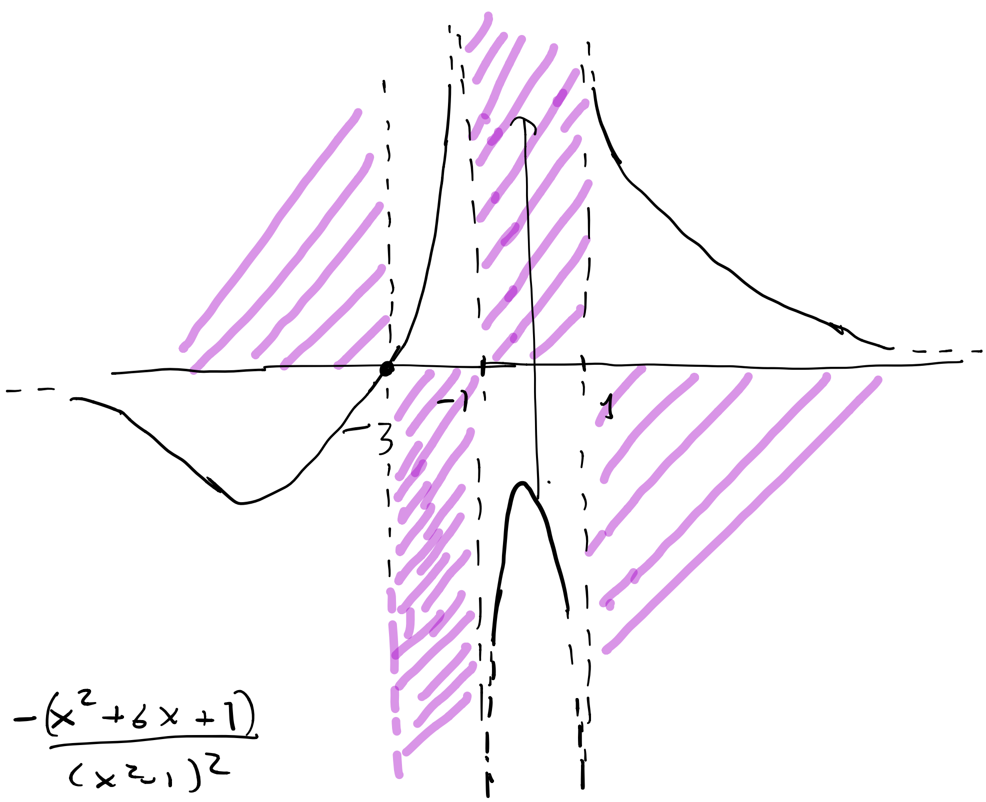
$$f'(x) = \frac{1}{x^2-1} - \frac{x+3}{(x^2-1)^2} \cdot 2x$$

$$= \frac{(x^2-1) - 2x^2 - 6x}{(x^2-1)^2} = \frac{-x^2-6x-1}{(x^2-1)^2}$$

studio il segno di $f'(x) = \dfrac{-x^2-6x-1}{(x^2-1)^2}$

Il denominatore è >0 sempre.

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9-1}}{-2} \quad \begin{cases} -\frac{3}{2} + \sqrt{2} \\ -\frac{3}{2} - \sqrt{2} \end{cases}$$



$$f'(x) = \frac{-(x^2+6x+1)}{(x^2-1)^2}$$

$$f''(x) = -\frac{2x+6}{(x^2-1)^2} + \frac{2(x^2+6x+1)\cdot 2x}{(x^2-1)^3}$$

$$= \frac{-2(x+3)(x^2-1) + 4x(x^2+6x+1)}{(x^2-1)^3}$$

$$= 2\left[\frac{-x^3 + x - 3x^2 + 3 + 2x^3 + 12x^2 + 2x}{(x^2-1)^3}\right] =$$

$$= \frac{2(x^3 + 9x^2 + 3x + 3)}{(x^2-1)^3} =$$

sicuramente il numeratore è < 0

quando $x \to -\infty$ ed è > 0 $\forall\, x \geq 0$

!

Approssimazione di Taylor.

Abbiamo visto che se f è DERIVABILE in x_0 allora

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + R_1(x)$$

dove $R_1(x) := f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$

soddisfa $|R_1(x)| \ll |x - x_0|$

Se $f(x)$ è derivabile 2 volte
(con derivata seconda continua) VICINO a
x_0, posso approssimare $f(x)$
tramite un POLINOMIO di GRADO due,
a meno di un errore $R_2(x)$ che è
molto minore di $|x-x_0|^2$; $|R_2(x)| \ll |x-x_0|^2$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x-x_0)^2 + R_2(x)$$

dove

$$R_2(x) := f(x) - \left(f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x-x_0)^2\right)$$

in generale posso approssimare una funzione
derivabile k volte VICINO ad un punto
x_0.

$$f(x) = T_k(x;x_0) + R_k(x;x_0)$$

T_k è il POLINOMIO di TAYLOR

$$T_k = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x-x_0)^2$$
$$+ \frac{1}{3!} f^{(3)}(x_0)(x-x_0)^3 + \cdots + \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k$$

$R_k := f(x) - T_k$ soddisfa $|R_k| << |x-x_0|^k$

cioè $\lim_{x \to x_0} \frac{|R_k|}{|x-x_0|^k} = 0.$

$f^{(3)}$ è la derivata terza $f^{(k)}$ derivata k-volte

ESEMPIO:

$f(x) = \sin x$

$f'(x) = \cos x$; $f''(x) = -\sin x$; $f^{(3)}(x) = -\cos x$

$f^{(4)}(x) = \sin x$;

$f^{(5)}(x) = \cos x$; $f^{(6)}(x) = -\sin x$; $f^{(7)}(x) = -\cos x$

$f^{(8)}$

$f(x) = \operatorname{sen} x$;

;

etc.

;

;

Prendiamo $x_0 = 0$; $k = 5$

$$\operatorname{sen} x = f(0) + f'(0)(x-0) + \frac{1}{2} f''(0)\, x^2 + \frac{1}{3!} f^{(3)}(0)\, x^3 + \frac{1}{4!} f^{(4)}(0)\, x^4 + \frac{1}{5!} f^{(5)}(0)\, x^5 + R_5$$

$$= 0 + x + 0 - \frac{1}{6} x^3 + 0 + \frac{1}{5!} x^5 + R_5$$

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{5!} x^5 + R_5$$

Può essere molto utile per fare i limiti x esempio

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x - x + \frac{1}{6} x^3}{x^5}$$

Non posso sostituire $\operatorname{sen} x$ con x

$$\sin x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + R_5$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x + \frac{x^3}{6}}{x^5} = $$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^5}{5!}}{x^5} + \lim_{x\to 0} \frac{R_5}{x^5} = \frac{1}{5!}$$

infatti $|R_5| << |x|^5$!

Scriviamo lo sviluppo di Taylor di

$tg(x)$ vicino a $x = 0$ al terzo ordine

$$f(x) = tg(x) \; ; \; f'(x) = 1 + tg^2(x) \; ; \; f''(x) = 2tg(x)(1+tg^2(x))$$

$$f'''(x) = 2(1+tg^2(x))^2 + (2tg\, x)^2(1+tg^2(x))$$

$$f(0) = 0 \; ; \; f'(0) = 1 \; ; \; f''(0) = 0 \; ; \; f^{(3)}(0) = 2$$

$$tg(x) = x + \frac{x^3}{3} + R_3(x)$$

trovare

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{tg} x}{x^3}$$