—.—.—.—.—

Approssimazione di Taylor.

Abbiamo visto che se f è DERIVABILE in x_0 allora

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + R_1(x)$$

dove $R_1(x) := f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$

soddisfa $|R_1(x)| << |x - x_0|$

Se $f(x)$ è derivabile 2 volte (con derivata seconda continua) VICINO a x_0, posso approssimare $f(x)$ tramite un POLINOMIO di GRADO due, a meno di un errore $R_2(x)$ che è molto minore di $|x-x_0|^2$; $|R_2(x)| << |x-x_0|^2$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x-x_0)^2 + R_2(x)$$

dove

$$R_2(x) := f(x) - \left(f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x-x_0)^2\right)$$

in generale posso approssimare una funzione derivabile k volte VICINO ad un punto x_0.

$$f(x) = T_k(x; x_0) + R_k(x; x_0)$$

T_k è il POLINOMIO di TAYLOR

$$T_k = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x-x_0)^2$$

$$+ \frac{1}{3!} f^{(3)}(x_0)(x-x_0)^3 + \dots + \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k$$

$R_k := f(x) - T_k$ soddisfa $|R_k| \ll |x-x_0|^k$

cioé $\lim \frac{|R_k|}{} = 0.$

$x \to x_0 \quad |x-x_0|^k$

$f^{(3)}$ è la derivata terza $\quad f^{(k)}$ derivata k-volte

ESEMPIO:

$$f(x) = \sin x$$

$$f'(x) = \cos x \; ; \; f''(x) = -\sin x \; ; \; f^{(3)}(x) = -\cos x$$

$$f^{(4)}(x) = \sin x \; ;$$

$$f^{(5)}(x) = \cos x \; ; \; f^{(6)}(x) = -\sin x \; ; \; f^{(7)}(x) = -\cos x$$

$$f^{(8)}(x) = \sin x \; ;$$

etc.

Prendiamo $x_0 = 0$, $k = 5$

$$\sin x = f(0) + f'(0)(x-0) + \frac{1}{2} f''(0)\, x^2 + \frac{1}{3!} f^{(3)}(0)\, x^3$$

$$+ \frac{1}{4!} f^{(4)}(0)\, x^4 + \frac{1}{5!} f^{(5)}(0)\, x^5 + R_5$$

$$= 0 + x + 0 - \frac{1}{6} x^3 + 0 + \frac{1}{5!} x^5 + R_5$$

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x + \frac{1}{5!}x + R_5$$

Può essere molto utile per fare i limiti xesempio

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x + \frac{1}{6}x^3}{x^5}$$

Non posso sostituire $\sin x$ con x

$$\sin x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + R_5$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x + \frac{x^3}{6}}{x^5} =$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\frac{x^5}{5!}}{x^5} + \lim_{x \to 0} \frac{R_5}{x^5} = \frac{1}{5!}$$

infatti $|R_5| << |x|^5$!

Scriviamo lo sviluppo di Taylor di

$tg(x)$ vicino a $x=0$ al terzo ordine

$$f(x) = tg(x) \quad ; \quad f'(x) = 1 + tg^2(x) \quad ; \quad f''(x) = 2tg(x)(1+tg^2(x))$$

$$f'''(x) = 2(1+tg^2(x))^2 + (2tg\,x)^2(1+tg^2(x))$$

$$f(0) = 0 \quad ; \quad f'(0) = 1 ; \quad f''(0) = 0 ; \quad f^{(3)}(0) = 2$$

$$tg(x) = x + \frac{x^3}{3} + R_3(x)$$

trovare

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x - tg\,x}{x^3}$$

TRUCCHI:

Composizione e serie di Taylor.

e^{x^2} vicino a $x=0$

per trovare il polinomio di Taylor all'ordine 6

sviluppo $f(y) = e^y$ vicino a $y=0$

(infatti se $x=0$ $y=x^2=0$)

$$f(y) = 1 + y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3!} + o(y^3)$$

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3!} + o(x^6)$$

$f(y) = \ln y$ $\quad y = x^2+3x+1$ $\quad y_0 = 1$

$$\ln(\underbrace{x^2+3x+1}_{\downarrow\, 1})$$ vicino a $x_0 = 0$

quando $x_0 = 0$

$$h(x) = \ln(x^2+3x+1) = h(0) + h'(0)x + \frac{1}{2}h''(0)x^2 + \frac{1}{3!}h^{(3)}(0)x^3 + o(x^3)$$

l'argomento del logaritmo vale $y_0 = 1$

$f(y) = \ln(y)$ sviluppo vicino a $y_0 = 1$

$$f(y) = \ln(1) + \frac{1}{1}(\overset{x^2+3x+1}{y}-1) - \frac{1}{2}(y-1)^2 + \frac{2}{3!}(y-1)^3 + o(y-1)^3$$

$f'(x) = \frac{1}{x}$

$f''(x) = -\frac{1}{x^2}$

$f'''(x) = +\frac{2}{x^3}$

ora quindi ponendo $y = x^2+3x+1$

$$\ln(x^2+3x+1) = x^2+3x - \frac{1}{2}(x^2+3x)^2 + \frac{1}{3}(x^2+3x)^3 + o(x^2+3x)^3$$

$$= x^2 + 3x - \frac{1}{2}(x^4 + 6x^3 + 9x^2) + \frac{1}{3}(x^6 + 3^3x^3 + 3\cdot 3x^5 + 3\cdot 3x^4)$$
$$+ o(3x)^3$$

ora voglio mettere NEL RESTO tutti i termini

che sono di grado > 3

(cioè sono $o(x^3)$)

① $o(x^2+3x)^3 = o(x^3)$ dato che $x^2+3x \sim 3x$

$$\ln(x^2+3x+1) = 3x + \left(1-\frac{9}{2}\right)x^2 - 3x^3 + 9x^3 + o(x^3)$$

$$= 3x + \frac{7}{2}x^2 + 6x^3 + o(x^3)$$

In generale se ho $h(x) = f(g(x))$

e voglio sviluppare vicino a x_0

(ma voglio evitare di fare le derivate)

Taylor $f(y)$ vicino a y_0

$$f(y) = f(y_0) + f'(y_0)(y-y_0) + \frac{1}{2}f''(y_0)(y-y_0)^2 +$$

$$+ \frac{1}{3!} f^{(3)}(y_0)(y-y_0)^3$$

$$+ o(y-y_0)^3$$

Poi sviluppo $g(x)$ vicino a x_0

$$g(x) = \underset{\substack{\parallel\!\!| \\ y_0}}{g(x_0)} + g'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2}g''(x_0)(x-x_0)^2 +$$

$$+ \frac{1}{3!} g^{(3)}(x_0)(x-x_0)^3$$

$$+ o(x-x_0)^3$$

sostituisco

$$h(x) = f(g(x)) = f(y_0) + f'(y_0)\left[g'(x_0)(x-x_0) + \frac{g''(x_0)}{2}(x-x_0)^2\right.$$

$$\left. + \frac{1}{3!} g^{(3)}(x_0)(x-x_0)^3 + o(x-x_0)^3\right.$$

$$+ \frac{1}{2} f''(y_0)\left[g'(x_0)(x-x_0) + \frac{g''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \frac{1}{3!} g^{(3)}(x_0)(x-x_0)^3 + R_3\right]^2$$

$$+ \frac{1}{3!} f^{(3)}(y_0)\left[g'(x_0)(x-x_0) + \frac{g''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \frac{1}{3!} g^{(3)}(x_0)(x-x_0)^3 + R_3\right]^3$$

$+ o(y-y_0)^3$

ora tutti i termini di grado > 3 vanno dentro al resto.

e $o(y-y_0)^3 = o\left(g'(x_0)(x-x_0)+ \dots\right)^3 = o(x-x_0)^3$