Riassunto Polinomio di Taylor.

Data $f(x)$ continua assieme a n derivate $(f \in C^n)$

posso approssimare $f(x)$ vicino ad un punto x_0 con un

polinomio di grado n

$+$

resto trascurabile $\ll (x-x_0)^n$

$$f(x) = \boxed{T_n(x)} + \boxed{o\left((x-x_0)^n\right)}$$ ← interessa per $x \to x_0$

$$T_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n$$

DEVE ESSERE UN POLINOMIO "centrato in x_0"

Viceversa se in qualche modo posso scrivere una funzione $h(x) \in C^n$ nella forma

$$h(x) = A_0 + A_1(x-x_0) + \frac{A_2}{2}(x-x_0)^2 + \frac{A_3}{3!}(x-x_0)^3$$
$$+ \cdots + \frac{A_n}{n!}(x-x_0)^n + o\left((x-x_0)^n\right)$$

allora deve essere vero che $h(x_0) = A_0$
$h'(x_0) = A_1$; $h''(x_0) = A_2$ --- etc.

Primitive di una funzione

Abbiamo discusso come calcolare la derivata di una DATA funzione $f(x)$
ora vorrei fare l'operazione inversa
voglio TROVARE $F(x)$ in modo che la derivata di $F(x)$ sia uguale ad una funzione DATA.

Per esempio se so che $F'(x) = 1$
allora $F(x) = x + c$
dove c è una qualsiasi costante.

Data $f(x)$ chiamo una funzione $F(x)$ tale che $F'(x) = f(x)$

UNA PRIMITIVA di f.

$F(x)$ a volte si indica con $\int f$ o $\int f\,dx$ (integrale INDEFINITO)

Facciamo un po' di esempi

① Funzioni potenza.

Io so che $\frac{d}{dx} x^{\alpha+1} = (\alpha+1)\, x^{\alpha}$

per $\alpha \neq -1$ quindi

$$\frac{1}{\alpha+1} \frac{d}{dx} x^{\alpha+1} = x^{\alpha}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1}\right) = x^{\alpha}$$

quindi ponendo $f(x) = x^{\alpha}$ per $\alpha \neq -1$

si ottiene che $F'(x) = x^{\alpha}$

$$\Rightarrow \quad F(x) = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + c$$

Per $\alpha = -1$ $\quad F'(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow$

$$F(x) = \ln(|x|) + c$$

Osservazione: Le funzione primitive NON è unica ma è SEMPRE definita A MENO di UNA COSTANTE!

CARATTERIZZAZIONE DELLE PRIMITIVE DI UNA FUNZIONE IN UN INTERVALLO. — *Se* F(x) *e* G(x) *sono due primitive di una stessa funzione* f(x) *in un intervallo* [a, b], *esiste una costante* c *tale che*

(68.1) $$G(x) = F(x) + c, \qquad \forall x \in [a, b].$$

Infatti se $G(x) = F(x) + c$

e $F'(x) = f(x)$ allora anche

$G'(x) = f(x)$ (infatti la derivata di

una costante è zero!)

Viceversa se $G(x)$ e $F(x)$

sono entrambe primitive di $f(x)$

cioè $G'(x) = f(x)$ e $F'(x) = f(x)$

allora $F'(x) - G'(x) = 0$

cioè $(F(x) - G(x))' = 0 \quad \forall x \in [a,b]$

ma (per il teorema di Lagrange)

se $F(x) - G(x)$ ha derivata

identicamente NULLA in un INTERVALLO

allora $F(x) - G(x) = \text{const.}$!

Dalle tavole delle derivate possiamo

ottenere corrispondenti TAVOLE di PRIMITIVE

per esempio

$$(\cos x)' = -\sin x$$

implica che $\int \operatorname{sen} x = -\cos x + \text{const.}$

$$(\operatorname{sen} x)' = \cos x \Rightarrow \int \cos x = \operatorname{sen} x + \text{cost}$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \; .$$

$$\Updownarrow$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + \text{const}$$

eccetera.

Ora dato che $\left(F(x) + G(x)\right)' = F'(x) + G'(x)$

e $(\lambda F)' = \lambda F'$

$$\int \left(f(x) + g(x)\right) = \int f(x) + \int g(x)$$

$$\int \lambda f(x) = \lambda \int f(x) \; .$$

DERIVATA del PRODOTTO e

integrazione PER PARTI

sappiamo che $(fg)' = f'g + fg'$

quindi $\int (f'g + fg') = f(x)\, g(x) + \text{const}$

e $\int (f'g + fg') = \int f'g + \int fg'$

$$\int f'(x)\, g(x) + \int f(x) \cdot g'(x) = f(x)\, g(x) + \text{const.}$$

ESEMPIO $f(x) = \sin x \quad g(x) = x$

$$\int \left((\cos x) \cdot x + \sin x \right) = x \sin x + \text{const}$$

$$\int x \cos x + \int \sin x = x \sin x + \text{const}$$

ora $\int \sin x = -\cos x + \text{const}$

quindi

$$\int x \cos x = -\int \sin x + x \sin x + \text{const}$$

$$= \cos x + x \sin x + \text{const}$$

Si scrive nella forma

$$\int f g' = -\int f' g + f g \; (+ \text{const})$$

È UTILE se $\int f' g$ è più facile

di $\int f g'$

Esempio 2.

$$\int \ln x = \int (\overset{f}{\ln x}) \cdot \overset{g'}{1}$$

se $g'(x) = 1 \rightsquigarrow g(x) = \int 1 = x$

(prendo la primitiva più semplice!)

$$\int (\ln x)\cdot 1 = -\int \frac{1}{x}\cdot x + (\ln x)\cdot x + \text{const}$$

$$= -\int 1 + x\ln x + \text{const}$$

$$= -x + x\ln x + \text{const}$$

Derivata della funzione composta
(ie cambio di variabile nell'integrale)

$$\left(f(g(x))\right)' = f'(g(x))\cdot g'(x)$$

quindi $$\int f'(g(x))\cdot g'(x)\,dx = f(g(x)) + \text{const}$$

per esempio

$$\int \frac{2x+3}{x^2+3x+1}\,dx = \int \frac{g'(x)}{g(x)}\,dx$$

$$f(y) = \ln(|y|) \qquad f'(y) = \frac{1}{y}$$

$$\int \frac{g'(x)}{g(x)}\,dx = \int f'(g(x))\, g'(x)\,dx = \ln(|g(x)|)$$

cioè $\ln(|x^2+3x+1|)$.

Si trova in varie varianti

$$\int F(g(x))\,dx =$$

$$\int \frac{F(g(x))}{g'(x)}\, g'(x)\,dx = f(g(x))$$

dove $f'(g(x)) = \dfrac{F(g(x))}{g'(x)}$

$$f(y) = \int \frac{F(y)}{g'(g^{(-1)}(y))}\,dy = \int F(y)\cdot\left(g^{(-1)}(y)\right)'\,dy$$

cioè $\int F(g(x))\,dx = \int F(y)\left(g^{(-1)}(y)\right)'\,dy\Big|_{u=c}$

Esempio $\int e^{3x+2}\,dx$

$F(y) = e^y \qquad g(x) = 3x+2 \qquad g^{(-1)}(y) = \frac{y-2}{3}$

$$\int e^{3x+2}\,dx = f(3x+2)$$

$$f(y) = \int \frac{e^y}{3}\,dy = \frac{e^y}{3}$$

$$\int e^{3x+2}\,dx = \frac{1}{3}e^{3x+2}$$

$$\int F(g(x))\,dx = \int F(y)\left(g^{(-1)}(y)\right)'dy$$

quindi se pongo $y = g(x)$

(con g INIETTIVA) $\qquad x = g^{(-1)}(y)$

$$dx = \left(g^{(-1)}(y)\right)'dy$$

$\int \sin(3x^2+2)\,x\,dx \qquad g'(x)\,dx = dy$

$g(x) = 3x^2 + 2 \qquad dx = \frac{dy}{6x}$

sostituendo si elimina la x !

$$\int \operatorname{sen}(\ y\ )\ x \cdot \frac{dy}{6x} = \frac{1}{6}\int \operatorname{sen}(y)\, dy \Big|_{y=3x^2+2}$$

$$\int \operatorname{sen}(3x^2+2)\ x\ dx = -\frac{1}{6}\cos(3x^2+2)$$

$\int G(x)\, dx$ posso cambiare variabili

$\|$ $\qquad x = h(y)$

$$\int G(h(y))\, h'(y)\, dy$$

$$\int \frac{-\operatorname{sen} x}{1+\cos^2 x}\, dx$$ provo $y = \cos x$