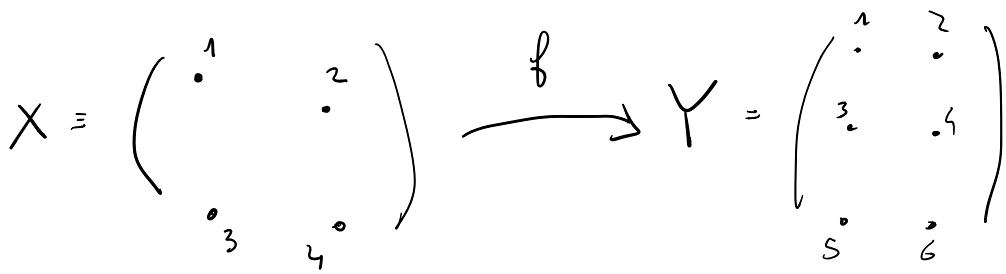
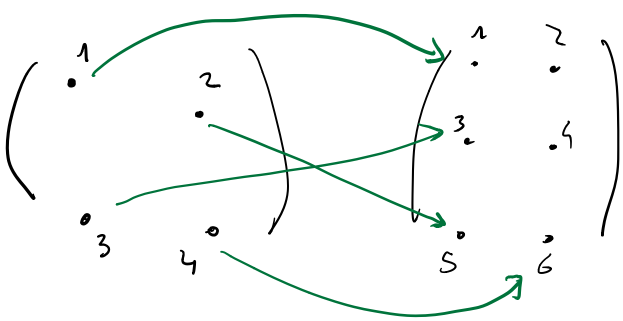
Le funzioni

"unica" rispetto alla 4.1, preferibile dal punto di vista pratico.

Definizione 4.1′ - *Siano X ed Y due insiemi. Si dice* **funzione** *da X in Y una* **corrispondenza univoca** *da X in Y, ovvero una corrispondenza che associa ad ogni elemento $x \in X$ uno ed un solo elemento $y \in Y$.*

Esempi



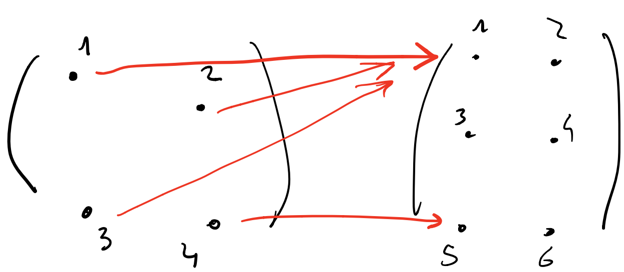


$f(1) = 1$

$f(2) = 5$

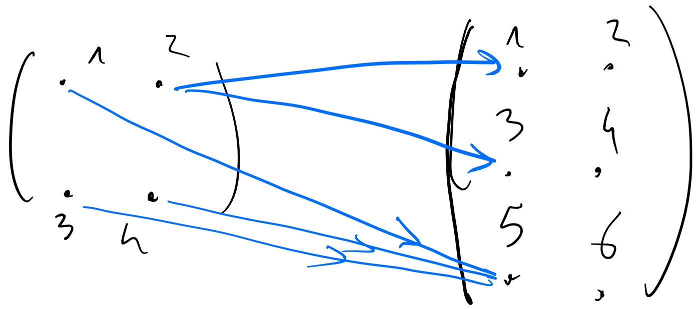
$f(3) = 3$

$f(4) = 6$



$f(1) = f(2) = f(3) = 1$

$f(4) = 5$



NON È UNA FUNZIONE

l'insieme X si chiama il DOMINIO

l'insieme Y il CODOMINIO

6. Funzioni e rappresentazione cartesiana

Siano A e B due insiemi di numeri reali. Una *funzione* di A in B è una legge che ad ogni elemento di A fa corrispondere uno ed uno solo elemento di B. Se indichiamo con f tale funzione, scriveremo $f : A \to B$, oppure $y = f(x)$, intendendo che ad ogni elemento $x \in A$ corrisponde, tramite la funzione f, l'elemento $y = f(x) \in B$.

Si dice che A è il *dominio* o *insieme di definizione* di f. Il simbolo f( ) indica un complesso di operazioni che devono effettuarsi su x (*argomento* di f) per ottenere y (*valore* di f), come negli esempi seguenti:

(6.1) $f(x) = 2x + 1$ — occorre moltiplicare x per 2 e sommare 1;

(6.2) $f(x) = 1/x$ — occorre calcolare l'inverso di x;

(6.3) $f(x) = \sqrt{x}$ — si deve calcolare la radice di x;

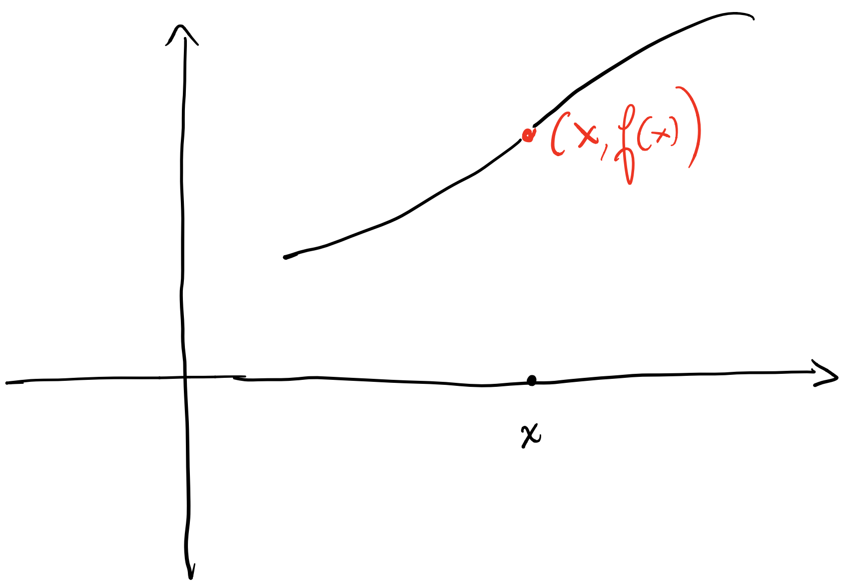
(6.4) $f(x) = \begin{cases} 0 & se\ x \in \mathbf{Z} \\ 1 & altrimenti \end{cases}$ — occorre riconoscere se x è intero oppure no, e di conseguenza assegnare ad f(x) il valore 0 oppure 1.

La funzione (6.1) è definita per ogni x reale; in altre parole il suo dominio è tutto **R**. La funzione (6.2) è definita per $x \neq 0$, quindi il suo dominio è

$A = \{x \in \mathbf{R}: x \neq 0\}$. Il dominio della (6.3) è $A = \{x \in \mathbf{R}: x \geq 0\}$, mentre la (6.4) è definita su tutto **R**.

Il valore f(x) della funzione f in x si chiama anche *immagine* di x mediante f.

Rappresentazione cartesiana



il grafico di f è

l'insieme dei punti in $\mathbb{R}^2$

della forma $(x, f(x))$

cioè

$$\left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.c. } \begin{array}{l} ① \ x \text{ è nel dominio di } f \\ ② \ y = f(x) \end{array} \right\}$$

Esercizio DISEGNARE il GRAFICO degli esempi precedenti

— — — — —

se $f : A \longrightarrow B$ con $A \subseteq \mathbb{R}$ e $B \subseteq \mathbb{R}$

l'immagine di $f \equiv f(A)$

$$f(A) := \left\{ y \in B \text{ t.c. esiste } x \in A \text{ per il quale } y = f(x) \right\}$$

$$\| \\ \bigcup_{x \in A} f(x)$$

$f : x \longrightarrow x^2$ $\quad \left(f(x) = x^2 \right)$

il dominio $A = \mathbb{R}$

il codominio $B = \mathbb{R}$

l'immagine $f(A) = \{y \in \mathbb{R} : y \geq 0\}$

infatti NON esiste nessun x t.c.

$x^2 = -1 \Rightarrow -1$ NON è nell'immagine

(stesso ragionamento per qualsiasi $y < 0$)

In generale dato un insieme

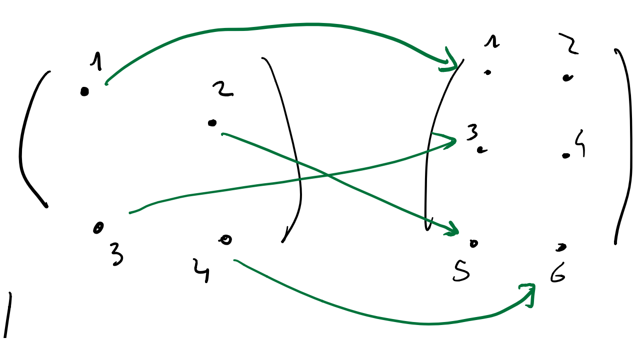
$E \subseteq A$ posso definire l'immagine

di E

$$f(E) := \{y \in B \mid \exists\, x \in E \text{ per cui } y = f(x)\}$$

$$\overset{\shortparallel}{\bigcup_{x \in E}} f(x)$$

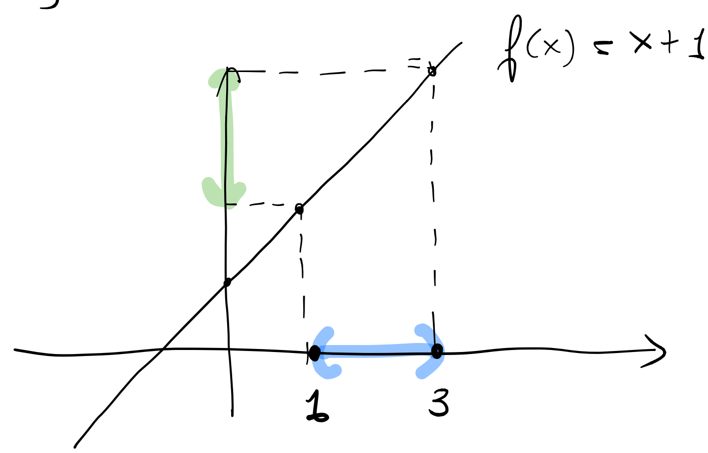
f :



$\downarrow$

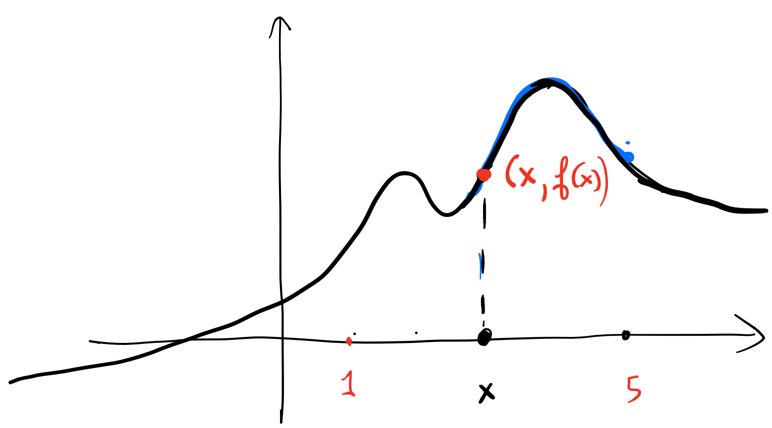
$f(\{1,2\}) = \{1,5\}$

Es. 1



$f((1,3)) = (2,4)$

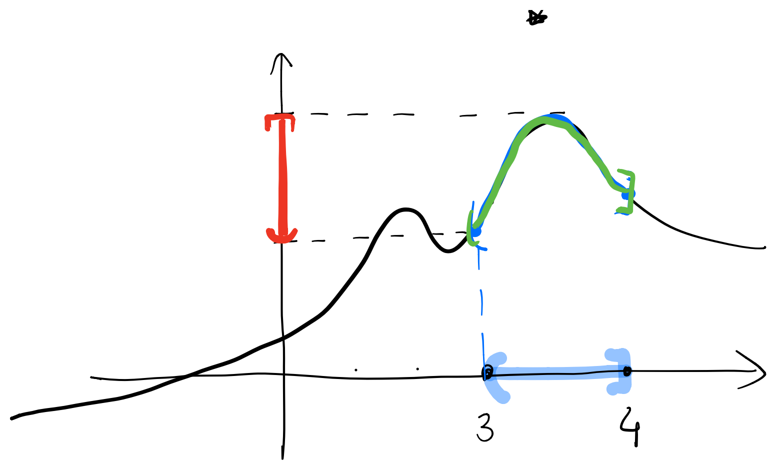
Esempio 2



prendiamo la funzione f definita da questo grafico

Voglio calcolare

$f((3,4])$



in celeste sull'asse x ho $(3,4]$ (di cui devo calcolare l'immagine)

in verde sul piano ho i punti del grafico in cui la prima coordinata (la x) appartiene a $(3,4]$

in rosso sull'asse y $f((3,4])$

Esercizio:

$f: x \longrightarrow \sqrt{1-x^2}$ ① Trovare il dominio D

② Trovare l'immagine $f(D)$

③ Disegnare il grafico

④ Trovare $f([-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}])$