$$\int \frac{dx}{(x-1)(x+1)^2}$$

stesso metodo del caso $\Delta > 0$

$$\frac{1}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{a}{(x-1)} + \frac{bx+c}{(x+1)^2}$$

determino a, b, c in modo che sia corretta

$$1 \equiv a(x^2+2x+1) + (bx+c)(x-1)$$

$$1 \equiv ax^2+2ax+a + bx^2 - bx + cx - c$$

$$\begin{cases} a+b = 0 \\ 2a-b+c = 0 \\ a-c = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = -b \\ c = 3b \\ -4b = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = \frac{1}{4} \\ c = -\frac{3}{4} \\ b = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

Sostituzioni di Eulero (per togliere le RADICI)

(1) se $a > 0$

(1a) $\sqrt{ax^2+bx+c} + \sqrt{a}\,x = y$

$$\Updownarrow$$

$$x = \frac{y^2 - c}{2y\sqrt{a} + b}$$

infatti

$$a\cancel{x^2} + bx + c = y^2 + a\cancel{x^2} - 2\sqrt{a}\,xy$$

$$-y^2 + 2\sqrt{a}\,xy + bx + c = 0$$

risolvo per x (eccetto il caso †)

$$(2\sqrt{a}\,y + b)\,x = y^2 - c$$

(1b) $$y = \sqrt{ax^2 + bx + c} - \sqrt{a}\,x$$

$$\Updownarrow$$

$$x = \frac{y^2 - c}{b - 2y\sqrt{a}}$$

Il punto è che x è una funzione RAZIONALE di y (NON CI SONO RADICI)

Esempio:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+c}} \qquad y = \sqrt{x^2+c} + x$$

$$x = \frac{y^2-c}{2y}$$

$$dx = \frac{1}{2} \frac{(2y)\cdot y - (y^2-c)}{y^2} \, dy$$

$$dx = \frac{y^2+c}{2y^2} \, dy$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+c}} = \int \frac{y^2+c \;\; dy}{2y^2\left(y - \frac{y^2-c}{2y}\right)}$$

$$= \int \frac{(y^2+c)}{y(y^2+c)} \, dy = \int \frac{dy}{y} \Bigg|_{y=\sqrt{x^2+c}-x}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+c}} = \ln(|x + \sqrt{x^2+c}|)$$

Esempio

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1} - 1} \qquad\qquad y = \sqrt{x^2+1} - x$$

$$\Downarrow$$

$$x^2+1 = y^2 + x^2 + 2xy$$

$$x = \frac{1-y^2}{2y} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{y} - y\right)$$

$$dx = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{y^2} - 1\right) dy = -\frac{1}{2}\,\frac{y^2+1}{y^2}\, dy$$

$$\sqrt{x^2+1} = y + x = y - \frac{y}{2} + \frac{1}{2y} = \frac{1}{2}\left(y + \frac{1}{y}\right)$$

$$\int \frac{dy}{\frac{y^2+1}{2y} - 1} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \frac{y^2+1}{y^2} =$$

$$= -\int \frac{y^2+1}{y(y-1)^2}\, dy \qquad\qquad (\text{somma e}$$

sottraggo $-2y$

$$= \int \frac{(y-1)^2 + 2y}{y(y-1)^2}\, dy$$

$$= \int \frac{1}{y}\, dy + 2\int \frac{dy}{(y-1)^2}$$

II) $\sqrt{ax^2+bx+c} = xy + \sqrt{c}$ $(c>0!)$

$$x = \frac{2\sqrt{c}\,y - b}{a - y^2}$$

III) $\sqrt{a(x-\alpha)(x-\beta)} = (x-\alpha)\, y$

Esempio

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{-x^2+1}}$$

$$\sqrt{-x^2+1} = xy - 1 \qquad y = \frac{\sqrt{1-x^2}+1}{x}$$

$$1 - x^2 = x^2y^2 - 2xy + 1$$

$$(y^2+1)x = 2y$$

$$\Downarrow$$

$$x = \frac{2y}{y^2+1}$$

$$dx = \left[\frac{2}{y^2+1} - \frac{4y^2}{(y^2+1)^2}\right]dy = 2\frac{(y^2+1-2y^2)}{(y^2+1)^2}dy$$

$$= 2\frac{(1-y^2)}{(y^2+1)^2}dy$$

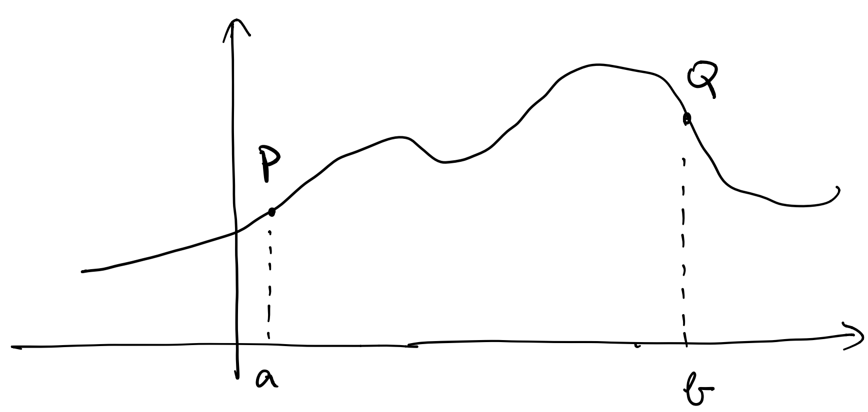
$$\sqrt{1-x^2} = \frac{2y^2}{y^2+1} - 1 = \frac{y^2-1}{y^2+1}$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} = 2\int \frac{(1-y^2)}{\frac{(y^2+1)^2\,2y}{y^2+1}\cdot\frac{y^2-1}{y^2+1}}\,dy$$

$$= -\int \frac{dy}{y}$$

$$= -\ln\left(\left|\frac{\sqrt{1-x^2}+1}{x}\right|\right) \qquad \checkmark$$

Integrale definito



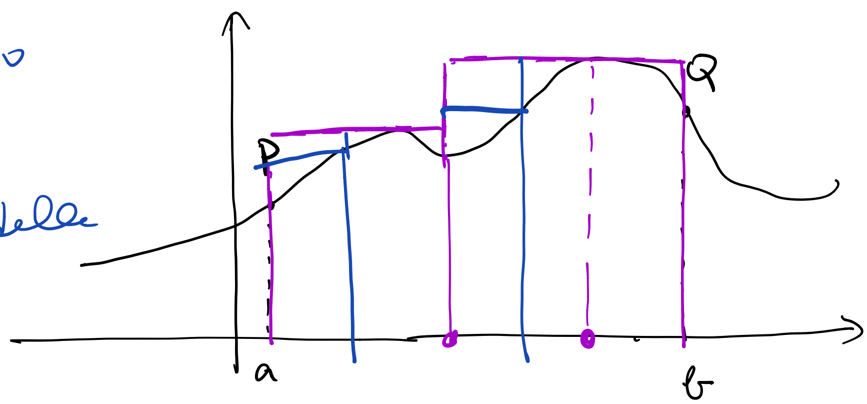
Voglio calcolare l'area fra la

curva i segmenti verticali PQ e Qb e il segmento $[a,b]$

Approssimo con figure di cui so calcolare l'area

(x ESEMPIO RETTANGOLI)

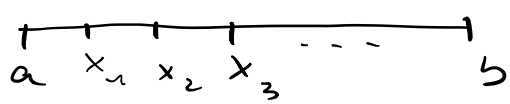
Approssimo con la somma delle aree dei rettangoli



Posso fare approssimazioni per eccesso e per difetto

Divido $[a,b]$ in N segmenti uguali

(x_i, x_{i+1}) con $x_0 = a$ $x_N = b$



$I_n = (x_{n-1}, x_n)$

Approx per eccesso:

$$S_N = \sum_{i=1}^{N} \sup_{x \in I_n} f \, (x_n - x_{n-1}) \equiv A_{eccesso}^{(N)}$$

difetto

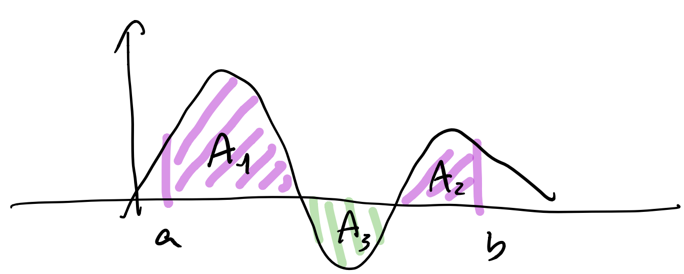
$$s_N = \sum_{i=1}^{N} \inf_{x \in I_n} f \, (x_n - x_{n-1}) \equiv A_{difetto}^{(N)}$$

f è INTEGRABILE su $[a,b]$

se esiste $\lim_{N \to \infty} S_N = \lim_{N \to \infty} s_n$

Se considero una funzione negativa

prendo l'area col segno $-$



$$\mathcal{A}_{a,b}(f) = A_1 + A_2 - A_3$$

Osservazione: $a \le c \le b$

$$A_{a,b}(f) = A_{a,c}(f) + A_{c,b}(f)$$

Posso definire per $a < b$

$$A_{b,a}(f) = -A_{a,b}(f)$$

→ Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale

Se $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ è CONTINUA

allora f è INTEGRABILE

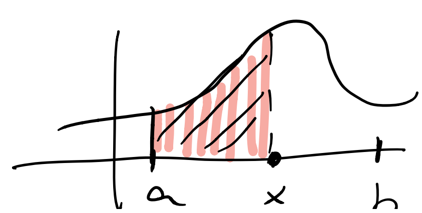
inoltre se $P(x)$ è una PRIMITIVA

di $f(x)$ allora

$$A_{a,b}(f) =: \int_a^b f(x)\,dx = P(b) - P(a)$$

Viceversa posto

$$F(x) = A_{a,x}(f)$$



(l'area fra a e x)

allora $F(x)$ è una primitiva.

<u>Osservazione</u>:

Non tutte le funzioni SONO INTEGRABILI!

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ \frac{1}{2} & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Voglio calcolare $A_{0,1}(f)$

Dato un qualsiasi N calcolo l'area per eccesso:

$$\forall i \qquad \sup_{x \in I_i} f(x) = \frac{1}{2}$$

$$S_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} 1 = \frac{N}{N} = 1$$

Calcolo l'area per difetto

$$\forall i \qquad \inf_{x \in I_i} f(x) = \frac{1}{2}$$

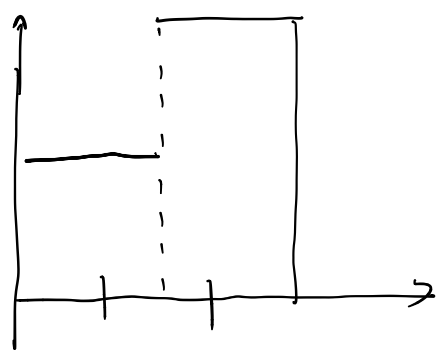
$$s_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \frac{N}{N} = \frac{1}{2}$$

NON è vero che $\lim_{N \to \infty} S_N = 1 = \lim_{N \to \infty} s_N = \frac{1}{2}$

NON è INTEGRABILE.

Esercizio:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < \frac{1}{2} \\ 2 & \frac{1}{2} < x < 1 \end{cases}$$



calcolare $A_{eccesso}^{(N)}$ per $N = 2, 3, 6, 7$

se $N = 2$

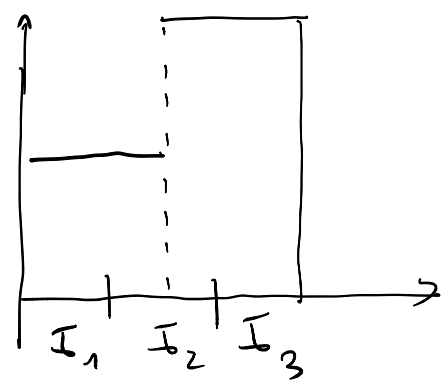
$$A_{eccesso}^{(2)} = \frac{1}{2} \left(\sup f(x) + \sup f(x) \right)$$

$$2 \quad \big| \; 0<x<\tfrac{1}{2} \qquad \tfrac{1}{2}<x<1$$

$$A_{eccesso}(2) = \frac{1}{2}\left(1+2\right) = \frac{3}{2}$$

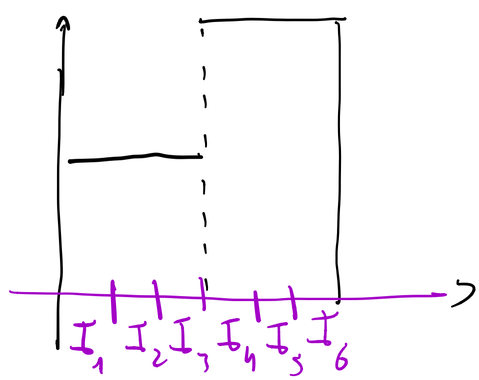
$$A_{eccesso}(3) = \frac{1}{3}\left(\sup_{x\in I_1} f(x) + \sup_{x\in I_2} f(x) + \sup_{x\in I_3} f(x)\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(1+2+2\right) = \frac{5}{3}$$



$$A_{eccesso}(6) = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} \sup_{x\in I_i} f(x)$$

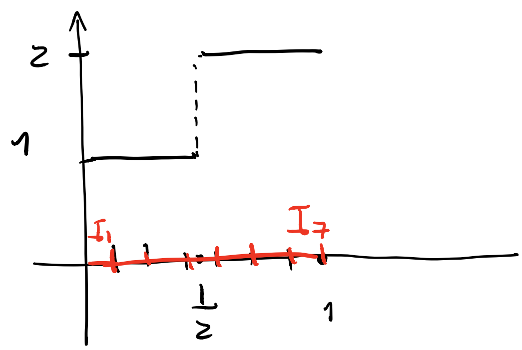
$$= \frac{1}{6}\left(1+1+1+2+2+2\right) = \frac{3}{2}$$



etc ... (su tutti gli N pari trovo

$A_{eccesso}(N) = \frac{3}{2}$)

$$A_{eccesso}(7) = \frac{1}{7} \sum_{i=1}^{7} \sup_{x \in I_i} f(x)$$



$$= \frac{1}{7}(1+1+1+2+2+2+2)$$

$= \frac{11}{7}$ (vicino a $\frac{3}{2}$

(l'errore che faccio è $\frac{1}{14}$!)

$$A_{eccesso}(N) \longrightarrow \frac{3}{2}$$