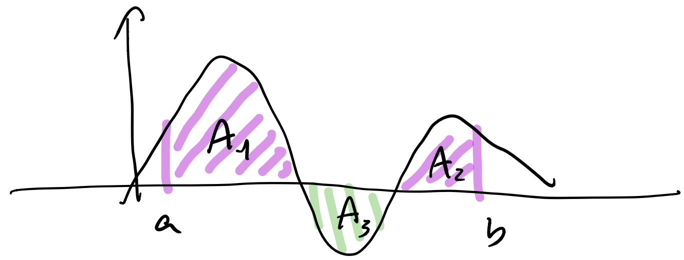
Se considero una funzione negative prendo l'area col segno −




$$\mathcal{A}_{a,b}(f) = A_1 + A_2 - A_3$$

sservazione: $a \leq c \leq b$

$$\mathcal{A}_{a,b}(f) = \mathcal{A}_{a,c}(f) + \mathcal{A}_{c,b}(f)$$

Posso definire per $a < b$

$$\mathcal{A}_{b,a}(f) = -\mathcal{A}_{a,b}(f)$$

per $a, b \in \mathbb{R}$ indico $\int_a^b f(x)\,dx := \mathcal{A}_{a,b}(f)$

→ Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale

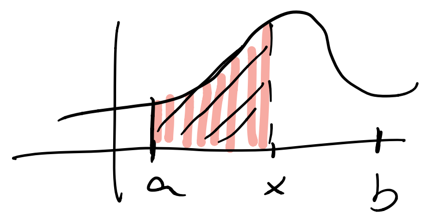
Se $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ è CONTINUA allora $f$ è INTEGRABILE

inoltre se $P(x)$ è una PRIMITIVA di $f(x)$ allora

$$A_{a,b}(f) = \int_a^b f(x)\,dx = P(b) - P(a)$$

viceversa posto

$$F(x) = A_{a,x}(f)$$

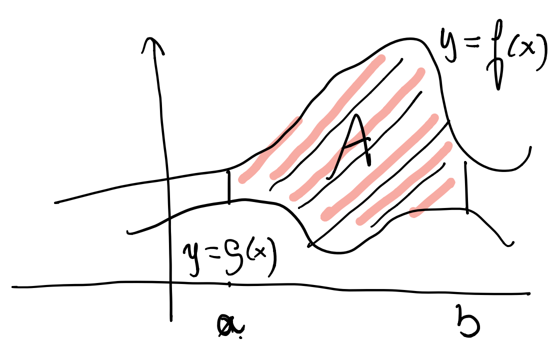



(l'area fra $a$ e $x$)

allora $F(x)$ è una primitiva.

Di conseguenza

$$A_x = \int_a^b f(x) - g(x)$$



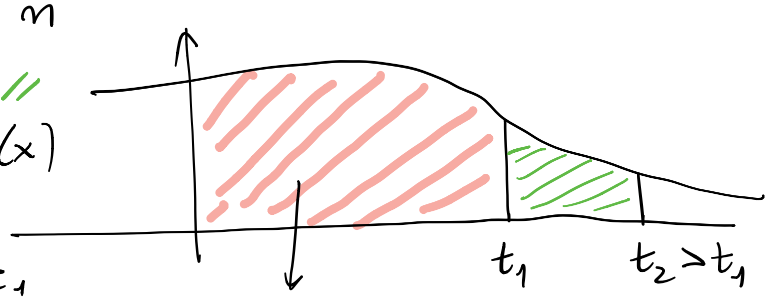
Posso definire un INTEGRALE IMPROPRIO

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_a^t f(x)dx$$

(se tale limite ESISTE FINITO)

Nota bene: se $f(x) \geq 0$ $A_{a,n}(f)$ è crescente in $n$

$$\int_a^{t_2} f(x) = \int_a^{t_1} f(x) + \int_{t_1}^{t_2} f(x)$$




cioè
$$\int_a^{t_2} f(x) \geq \int_a^{t_1} f(x)$$

**CRITERIO DEL CONFRONTO.** — *Supponiamo che nell'intervallo* $[a, +\infty)$ *risulti* $0 \leq f(x) \leq g(x)$. *Se l'integrale improprio relativo alla funzione* g *nell'intervallo* $[a, +\infty)$ *è convergente, allora anche l'integrale improprio relativo alla funzione* f *in* $[a, +\infty)$ *è convergente. Se invece l'integrale relativo ad* f *è divergente, anche l'integrale relativo a* g *è divergente.*

## Confronto ASINTOTICO

se $\quad g(x), f(x) \geq 0 \quad$ e $\quad g(x) \sim f(x)$

allora $\qquad\qquad$ per $x \to \infty$

$$\int_a^\infty g(x) < \infty \quad \text{SE E SOLO SE} \quad \int_a^\infty f(x) < \infty$$

Per esempio:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{t \to \infty} \int_1^t \frac{dx}{x^2} = \lim_{t \to \infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_1^t$$

$$= 1 < \infty$$

vuol dire che $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x}{x^2+1} < \infty$

infatti $\displaystyle\frac{x}{x^2+1} \sim \frac{1}{x}$