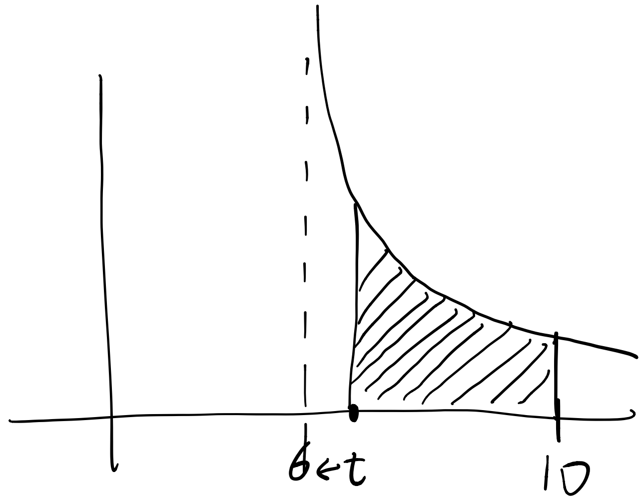
$$\int_6^{10} \frac{1}{x-6} = \lim_{t \to 6^+} \int_t^{10} \frac{dx}{x-6}$$

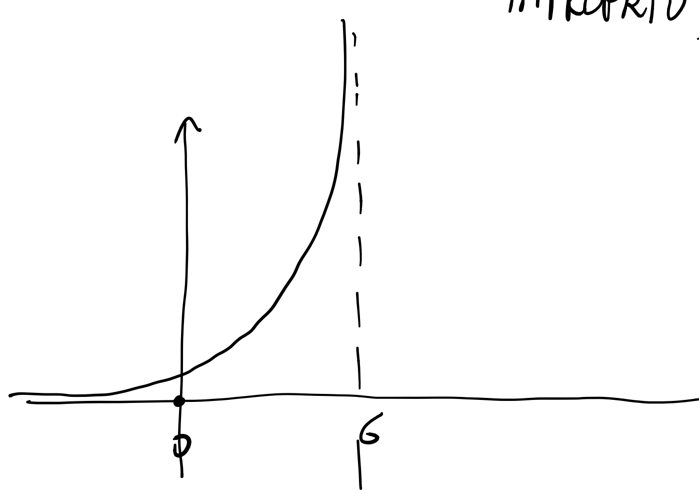


se $\exists!$ il limite $t \to 6^+$

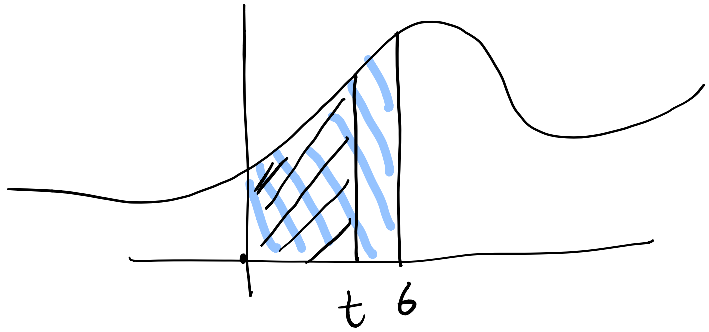
dico che $f(x)$ è integrabile (SENSO IMPROPRIO)

$$\int_0^6 f(x)\,dx =$$

$$\lim_{t \to 6^-} \int_0^t f(x)\,dx$$



(continua alla fine)



SERIE NUMERICHE. Data una

$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots \quad a_j \in \mathbb{R}$ successione

posso definire

$$S_k = \sum_{n=1}^{k} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_k$$

Se S_k è una successione convergente allora diremo il suo limite

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una SERIE NUMERICA.

CONVERGENTE

Osservazione 1. se i termini $a_n \geq 0$

allora S_k è crescente in k

(REM. le successioni monotone ammettono SEMPRE UN LIMITE)

$$S_k = \sum_{n=1}^{k} a_n \quad \text{con} \quad a_n \geq 0$$

si chiama SERIE a termini POSITIVI

due possibilità:

1. $S_k \to +\infty$ la serie DIVERGE
2. $S_k \to S \in \mathbb{R}$ la serie CONVERGE

(Naturalmente se $a_n \not\to 0$ allora NON è detto che esiste il limite!

ESEMPIO:

$$S_k = \sum_{n=1}^{k} (-1)^n = -1 + (-1)^2 + (-1)^3 + (-1)^4 + \dots$$

$$= -1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 + \dots$$

se k è pari $S_k = 0$

se k è dispari $S_k = -1$

Non esiste il limite!

le serie numeriche sono delle successioni

quindi VALGONO TUTTE LE PROPRIETÀ DELLE SUCCESSIONI (confronto, carabinieri etc...)

Proposizioni Principali:

CONDIZIONE NECESSARIA PER LA CONVERGENZA DI UNA SERIE. — *Se la serie* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *è convergente, allora la successione* a_n *tende a zero per* $n \to +\infty$.

Nota Bene

Se $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| < \infty$ allora anche $\sum a_k$

è UNA SERIE CONVERGENTE

(NON vale il viceversa!)

Quindi studiamo le serie a termini positivi

CRITERIO DEL RAPPORTO. — *Sia* a_n *una successione a termini positivi. Supponiamo che esista il limite*

(86.11) $$\ell = \lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Allora si ha:

(86.12) $$\ell < 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k < +\infty ;$$

(86.13) $$\ell > 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k = +\infty.$$

Per esempio:

$$\sum \frac{1}{k!} \qquad a_k = \frac{1}{k!}$$

$$\lim_{k \to \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{\frac{1}{(k+1)!}}{\frac{1}{k!}} = \frac{k!}{(k+1)!} = \frac{1}{k} \to 0$$

converge!

$$\sum \left(\frac{1}{2}\right)^k \qquad a_k = \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{k}} = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow \text{CONVERGE!}$$

$\sum 2^k$ DIVERGE (OVVIO $a_k \not\to 0$)

$\sum \frac{2^k}{k!}$ CONVERGE

Esercizio: dire per quali x $\sum_{k=1}^{\infty} x^k$ converge.

① Se $|x| \geq 1$ allora $a_k = x^k$ non tende a zero LA SERIE NON CONVERGE!

Se $|x| < 1$ studio la serie a termini positivi $\sum |x|^k$ (se questa converge converge anche $\sum x^k$)

Applico il criterio del RAPPORTO

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|x|^{k+1}}{|x|^k} = |x| < 1 \qquad \text{CONVERGE}$$

Risposta CONVERGE per $|x| < 1$

CRITERIO DELLA RADICE. — *Sia* a_n *una successione a termini non negativi. Supponiamo che esista il limite*

$$\ell = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n}\,. \tag{86.19}$$

Allora valgono le stesse conclusioni (86.12), (86.13) del criterio precedente.

$$\sum |x|^k \qquad \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = \lim_{k\to\infty} \left(|x|^k\right)^{\frac{1}{k}} = |x| < 1$$

Non è utile se $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = 1$

(idem se $\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = 1$)

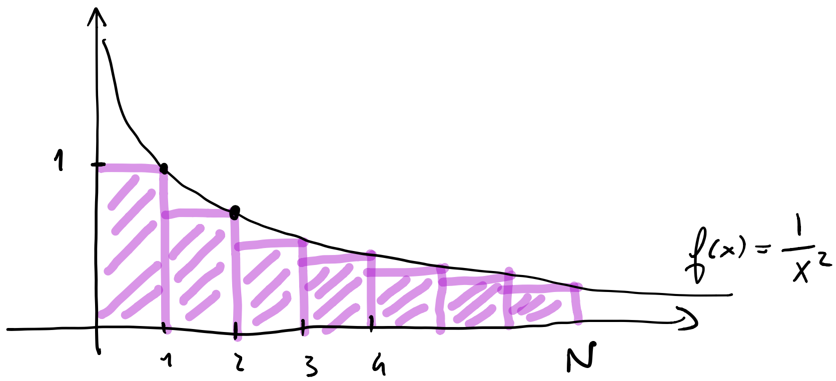
Per esempio $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ (CONVERGE)

$$\lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)^2}{k^2} = 1 \ ; \quad \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\frac{1}{k^2}} = 1$$

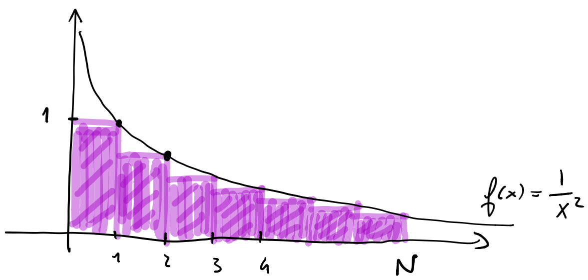
Si usa il TEOREMA del CONFRONTO INTEGRALE

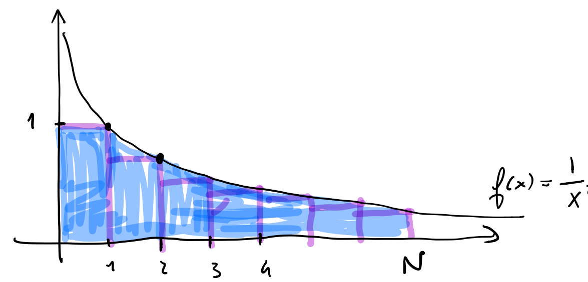
$$\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^2} = f(1) + f(2) + \dots + f(N)$$

= Area in viola!



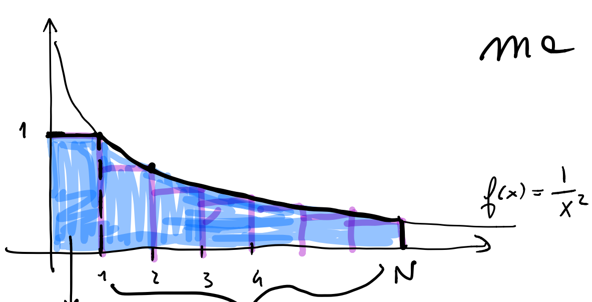
Ma per definizione di INTEGRALE DEFINITO





l'area in viola ≤ Area in blu

(si tratta di una SOMMA PER DIFETTO!)



ma l'area in Blu è un integrale

$$1 + \int_1^N \frac{1}{x^2}\,dx = 1 + 1 - \frac{1}{N} = 2 - \frac{1}{N}$$

quindi $\displaystyle\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{N}$

e di conseguenza $\displaystyle\lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^2} \leq 2$

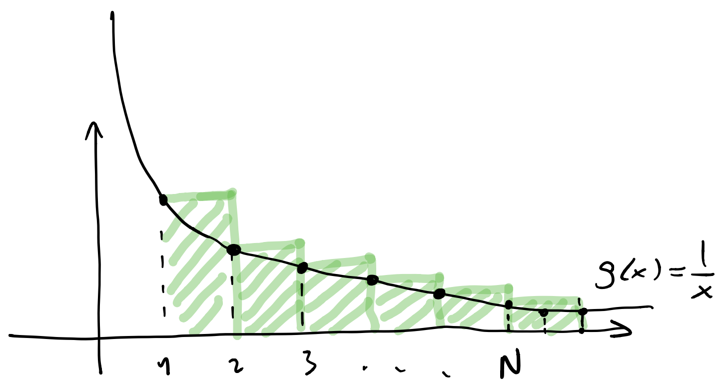
ma la serie a termini positivi o

CONVERGE o ha limite $= \infty$

dato che $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \leq 2 \Rightarrow$ CONVERGE!

Altro esempio

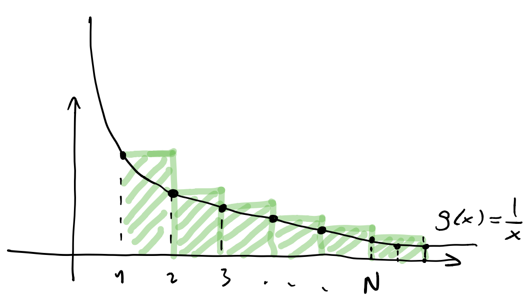
$$\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k}$$



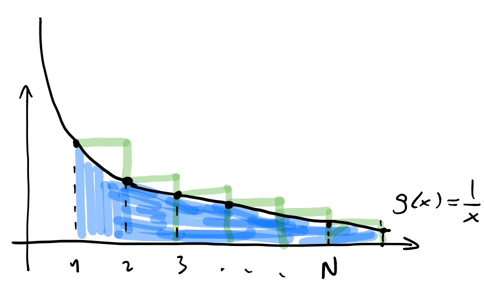
$= g(1) + g(2) + \dots + g(N)$

$=$ Area in VERDE

ma secondo lo stesso principio di prima



$\geq$



area in verde $\geq$ area in blu

e area in blu $= \displaystyle\int_1^{N+1} \frac{1}{x}\,dx = \ln(N+1)$

quindi $\displaystyle\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} \geq \ln(N+1)$

cioè $\displaystyle\lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} \to \infty$ (criterio del CONFRONTO!)

TEOREMA:

Se $f(x) \geq 0$ è MONOTONA decrescente e limitata in $[1,\infty)$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ converge se e solo se

esiste FINITO l'integrale improprio

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx$$

–

ESERCIZIO:

Dimostrare che $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{3/2}}$ CONVERGE!

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(k) \qquad f(x) = \frac{1}{x^{3/2}}$$

il criterio CONFR. INT. $\sum \frac{1}{k^{3/2}}$

converge $\iff \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{3/2}} < \infty$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n + 1)^2} \rightsquigarrow \int_1^{\infty} \frac{1}{x(\ln x + 1)^2}\,dx$$

Naturalmente vale anche

il CONFRONTO FRA SERIE

<u>TEOREMA:</u> date $0 \le a_n \le b_n$

Se $\sum b_n$ CONVERGE

ALLORA

$\sum a_n$ CONVERGE

Se $\sum a_n$ DIVERGE

ALLORA

$\sum b_n$ DIVERGE

CONCLUSIONE INTEGRALI IMPROPRI

Esercizio: PER QUALI valori di α

$\frac{1}{x^\alpha}$ è integrabile in $[0,1]$

$$\int_t^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \left[-\frac{1}{\alpha-1} x^{-\alpha+1} \right]_t^1 \qquad \text{per } \alpha \neq 1$$

1 $\alpha \neq 1$

$$\int_t \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{\alpha-1}\left(t^{-\alpha+1} - 1\right)$$

calcolo $\displaystyle \lim_{t\to 0^+} \int_t^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{\alpha-1} \lim_{t\to 0^+} \left(t^{-\alpha+1} - 1\right)$

CASO 1 $\alpha < 1 \Rightarrow -\alpha+1 = 1-\alpha > 0$

$$\frac{1}{\alpha-1}\left(0^+ - 1\right) = \frac{1}{1-\alpha} > 0$$

se $\alpha < 1$ $\displaystyle \int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}$ INTEGRABILE

se $\alpha > 1$ $\displaystyle \frac{1}{\alpha-1}\left(\left(0^+\right)^{-\alpha+1} - 1\right) = \frac{1}{0^+} = +\infty$

$\displaystyle \int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \infty$ NON INTEGRABILE

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{t\to 0^+} \int_t^1 \frac{dx}{x} = \lim_{t\to 0^+} \left[\ln x\right]_t^1$$

$$= -\lim_{t\to 0^+} \ln t = -(-\infty) = +\infty$$

$t \to 0^+$

Anche in questo caso vale

IL CONFRONTO ASINTOTICO

Se $f(x), g(x) \geq 0$ sono definite

in $(a, b]$, hanno un

asintoto verticale in a

e vale $f(x) \sim g(x)$ per $x \to a^+$

allora

$$\int_a^b f(x) < \infty \iff \int_a^b g(x) < \infty$$