$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n+1)^2} = \sum_{n=1} f(n)$$

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x+1)^2} = \lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{dx}{x(\ln x+1)^2}$$

calcoliamo la primitiva:

$$\int \frac{dx}{x(\ln x+1)^2} = \int \frac{dy}{(y+1)^2}\Bigg|_{y=\ln x}$$

$$= -\frac{1}{\ln x+1}$$

$$\int_1^t \frac{dx}{x(\ln x+1)^2} = 1 - \frac{1}{\ln t+1}$$

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x+1)^2} = 1$$

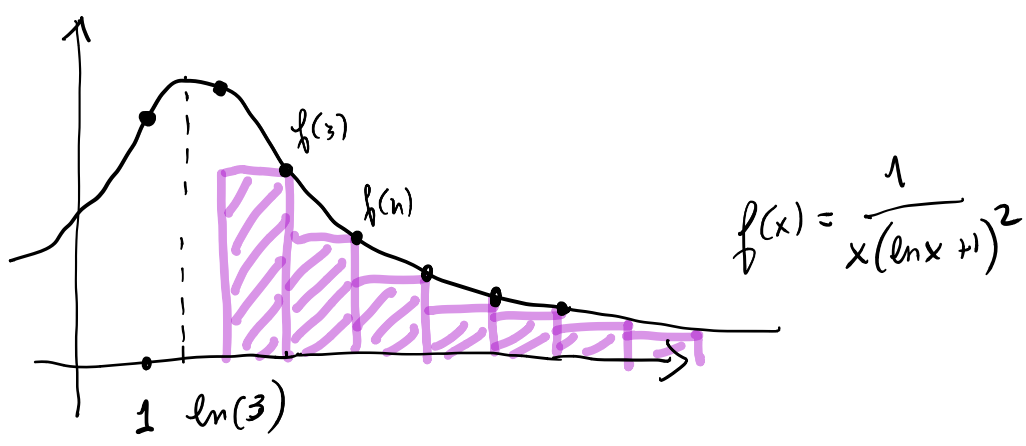
quindi $\sum \frac{1}{n(\ln n+1)^2}$ CONVERGE

$$\frac{1}{x(\ln x + 1)^2} \quad \text{é decrescente?}$$

Se calcolo la derivata viene che

DECRESCE per $x > \ln(3)$

POSSO COMUNQUE APPLICARE il confronto integrale $\sum_{n=1}^{k} f(n)$



$$\sum_{n=1}^{k} f(n) = f(1) + f(2) + \text{aree viola}$$

ora AREA VIOLA $\leq \displaystyle\int_2^\infty f(x)\,dx$!

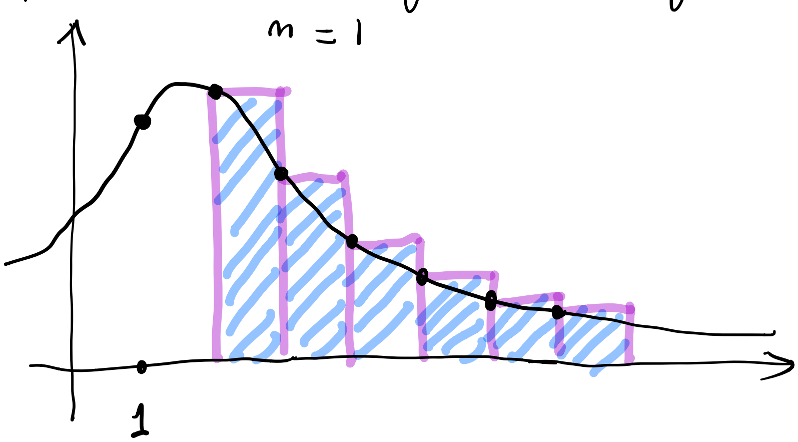
(e ovviamente dato che $f(x)$ è limitata

$$\int_2^\infty f(x)\,dx < \infty$$

SE E SOLO SE

$$\int_1^\infty f(x)\,dx < \infty$$

quindi $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \leq f(1) + f(2) + \int_2^\infty f(x)\,dx$



Allo stesso modo

$$\sum_{n=1}^{k} f(n) \geq f(1) + \text{Area blu}$$

$$\text{Area blu} \geq \int_{2}^{\infty} f(x)\,dx$$

In conclusione

$$f(1) + \int_{2}^{\infty} f(x)dx \leq \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \leq f(1) + f(2) + \int_{2}^{\infty} f(x)\,dx$$

$$\sum f(n) \quad \text{CONVERGE} \iff \int_{2}^{\infty} f(x)\,dx < \infty$$

$$\Updownarrow$$

$$\left(\int_{1}^{\infty} f(x)\,dx < \infty \right)$$

<u>TEOREMA</u>: $\left(\text{studio } \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \right)$

Sia $f(x)$ tale che $f(n)$ è ben definit $\forall n \in \mathbb{N}$

SE Esiste $A > 0$

per cui per $x \geq A$ (cioè in $[A, \infty)$)

① $f(x) \geq 0$

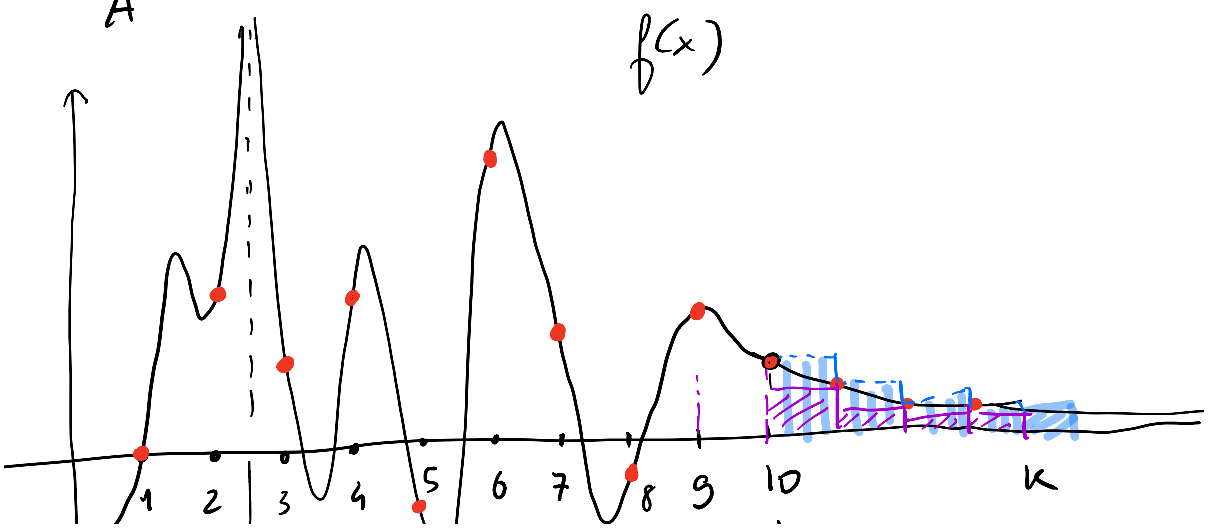
② $f(x)$ è LIMITATA

③ $f(x)$ è decrescente ④ è continua

Allora $\sum f(n)$ CONVERGE

SE e SOLO SE

$$\int_A^\infty f(x)\, dx < \infty$$



$\forall \qquad \vee \qquad \overset{\shortparallel}{A}$

se $\quad k > A$

$$\sum_{n=1}^{k} f(n) = \underbrace{f(1)+f(2)+\dots}_{\text{SOMMA FINITA}} + \overbrace{f(A) + \underbrace{\sum_{n=A+1}^{k}}_{\text{Area viola}} f(n)}^{\text{Area blu}}$$

$\sum_{n=1}^{k} f(n)$ converge

$$\Updownarrow$$

$$\int_A^{\infty} f(n) < \infty$$

Questo vuole anche dire che se

$a_n, b_n \geq 0$ e $a_n \sim b_n$ per $n \to \infty$

(cioè $\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$) allora

$$\sum a_n < \infty \iff \sum b_n < \infty$$

CRITERIO DI LEIBNITZ

(per le serie a SEGNI ALTERNI)

Sia a_n una successione INFINITESIMA (cioé $a_n \to 0$) e DECRESCENTE $0 \le a_{n+1} \le a_n$)

ALLORA $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ CONVERGE

Per esempio $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n+1)}$ CONVERGE !

$\sum \frac{(-1)^n}{n}$ CONVERGE

Esercizio:

per quali valori di $x \in \mathbb{R}$

CONVERGE LA SERIE

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

① Se $|x| > 1$ $\quad a_n = \frac{x^n}{n} \not\to 0$

La serie NON può convergere dato che a_n NON tende a zero.

② Se $|x| < 1$ CRITERIO DELLA RADICE

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{|x|^n}{n}} = |x| < 1$$

$\sum \frac{x^n}{n}$ CONVERGE ASSOLUTAMENTE per $|x| < 1$

cosa succede per $|x| = 1$?

Se $x = 1$

$$\sum \frac{1^n}{n} = \sum \frac{1}{n} \Rightarrow \infty \quad \text{DIVERGE}$$

Se $\quad x = -1$

$\sum_n \frac{(-1)^n}{n}$ CONVERGE (per LEIBNITZ)

(naturalmente NON CONVERGE ASSOLUTAMENTE)

Per quali valori di p converge

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^p}$$