Se f è BIUNIVOCA $f: X \to Y$

$\forall\, y \in Y$ esiste un unico $x \in X$

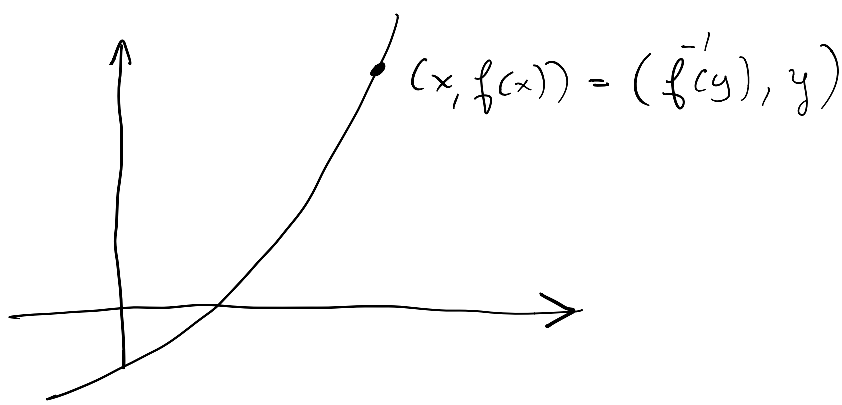
tale che $y = f(x)$ $\quad (x = f^{-1}(y))$

quindi ho una relazione $y \longrightarrow f^{-1}(y)$

che ad ogni elemento di Y

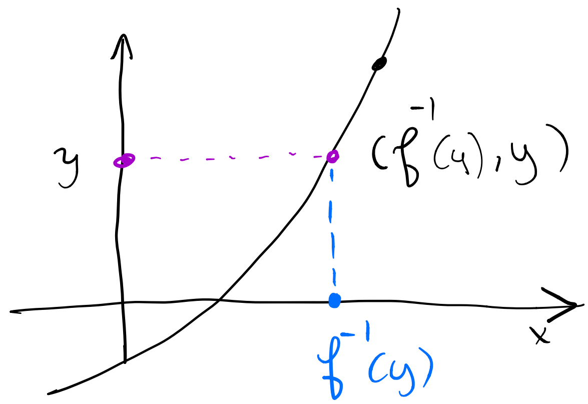
associa un elemento di X $\quad (f^{-1}: Y \to X)$

(N.B. anche f^{-1} è iniettiva e suriettiva)



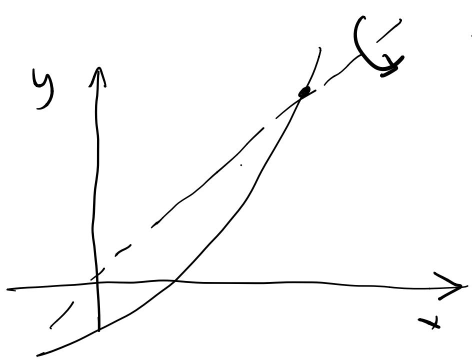
dire che $y = f(x)$ è equivalente a

dire che $x = f^{-1}(y)$

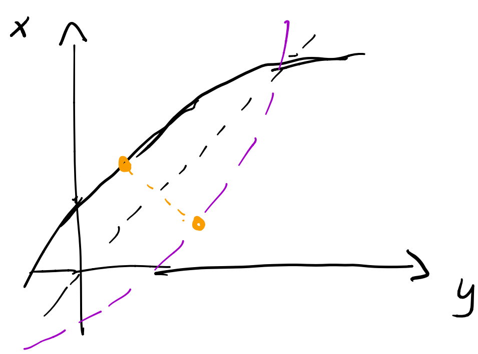


Dal grafico di f fisso y sulle ordinate trovo il pto corrispondente nel grafico proietto sulle ascisse.

Di solito si preferisce fare grafici in cui l'input è sulle ascisse



← bisogna ruotare lungo questo asse $(y = x)$



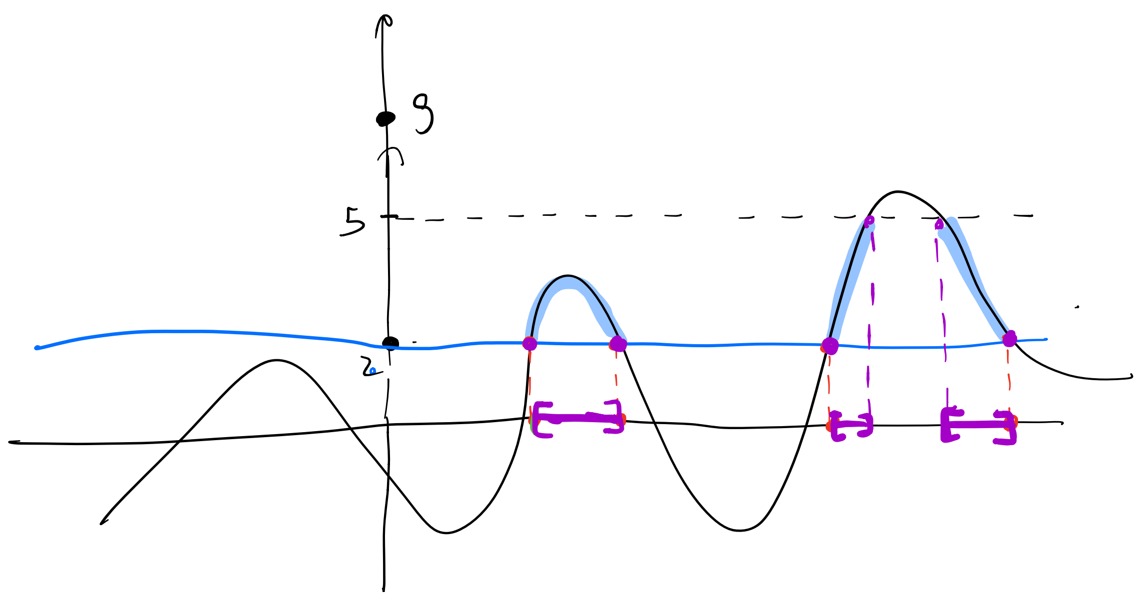
Ancora sulle preimmagini di una funzione $f: X \to Y$

Voglio definire la preimmagine di un insieme $B \subseteq Y$

$$f^{-1}(B) := \{ x \in X \text{ t.c. } f(x) \in B \}$$

$$\left(= \bigcup_{y \in B} f^{-1}(y) \right)$$

Per trovare $f^{-1}([2,5])$ devo trovare la preimmagine $f^{-1}(y)$ per tutti gli $y \in [2,5]$



in blu le parti del grafico

in cui le $y \in [2,5]$

tutte le ascisse corrispondenti sono

$f^{-1}([2,5])$ = intervalli in viola.

Nota bene trovare $f^{-1}([2,5])$

$$\Updownarrow$$

trovare gli x tali che $2 \le f(x) \le 5$

Un pó di esercizi ....

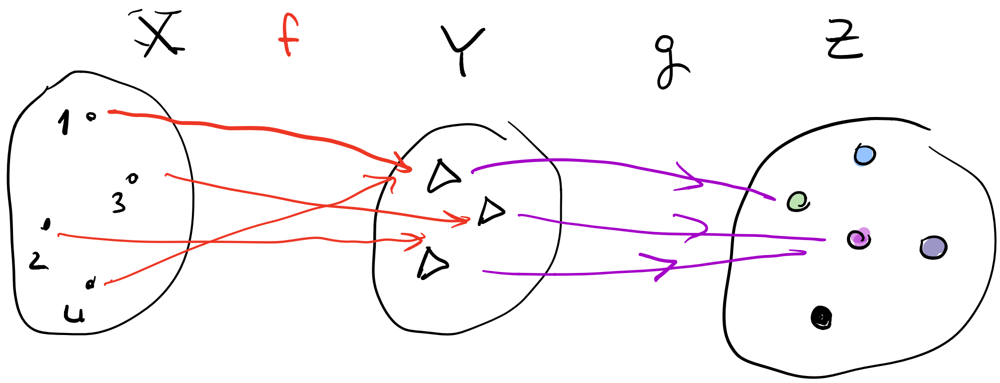
— . — . —

Composizione di funzioni

Date $f: X \to Y$ e $g: Y \to Z$

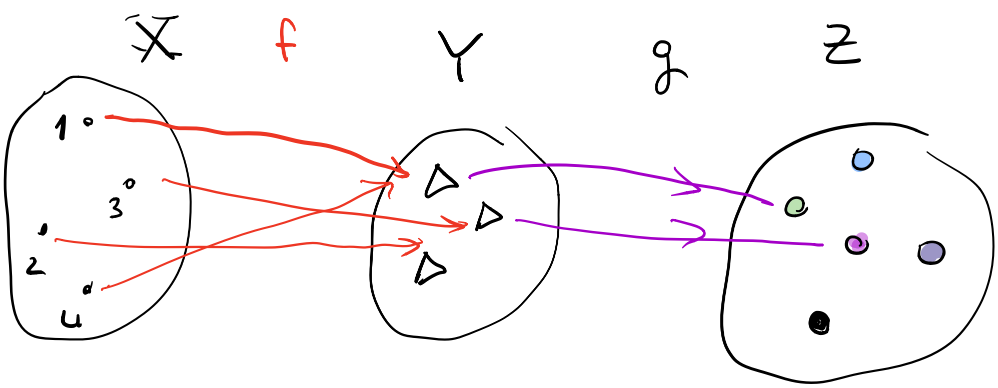
posso definire $g \circ f : X \to Z$

$$x \xrightarrow{f} f(x) \xrightarrow{g} g(f(x))$$



Nota bene se il DOMINIO di g

è un sottoinsieme PROPRIO di $f(X)$



$g(f(2))$ NON è definito!

quindi il dominio di $g \circ f$ è

$X / \{2\}$.

Data $f: A \to B$

(7.2) $f^{-1}(f(x)) = x, \quad \forall x \in A; \qquad f(f^{-1}(y)) = y, \qquad \forall y \in B.$

Diremo che una funzione f è *monotòna* in un insieme A, se verifica una delle condizioni seguenti ($\forall x_1, x_2 \in A$):

(7.4) f *strettamente crescente*: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$,

(7.5) f *crescente*: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2)$,

(7.6) f *strettamente decrescente*: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$,

(7.7) f *decrescente*: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \ge f(x_2)$.

Una funzione che verifica la (7.4), oppure la (7.6), si dice *strettamente monotòna*.

Se f é strettamente monotona $\nearrow$
e SURIETTIVA allora è invertibile

Dim. Basta far vedere che è iniettiva
cioè se $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

Infatti se $x_1 \neq x_2$ allora o $x_1 > x_2$ (A) o $x_1 < x_2$ (B)
se vale (A) allora per (7.4) $f(x_1) > f(x_2)$
se vale (B) sempre per (7.4) $f(x_1) < f(x_2)$
IN OGNI CASO $f(x_1) \neq f(x_2)$!

Esercizio: Se f e g sono crescenti allora

① se $f(x) \geq 0$ e $g(x) \geq 0$ $f \cdot g$ è crescente

② $f \circ g$ è crescente

③ Se f è invertibile e crescente $\Rightarrow$ f^{-1} è crescente

Funzioni potenza

Si chiama *funzione lineare* (o *funzione affine*) una funzione del tipo

(8.1) $$y = mx + q$$

ove m, q sono numeri reali fissati. Si verifica facilmente che il grafico di una tale funzione è una retta, di cui il parametro m è detto *coefficiente angolare.*

Ogni funzione lineare è monotòna su **R**, anzi, strettamente monotòna se $m \neq 0$. Infatti, basta considerare $x_1 < x_2$ e $f(x) = mx + q$, da cui

Se $m > 0$

(col (7.4)) $mx_1 < mx_2 \Rightarrow mx_1 + q < mx_2 + q$

Ricordiamo il criterio esposto nel paragrafo precedente, criterio in base al quale una funzione strettamente monotòna su un insieme è anche invertibile su tale insieme. Nel caso in considerazione la funzione $f(x) = mx + q$ è strettamente monotòna su **R** se $m \neq 0$ e quindi è anche invertibile se $m \neq 0$. Tale fatto è di semplice verifica diretta: infatti, se $m \neq 0$, vale l'equivalenza:

(8.3) $$y = mx + q \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{y-q}{m}$$

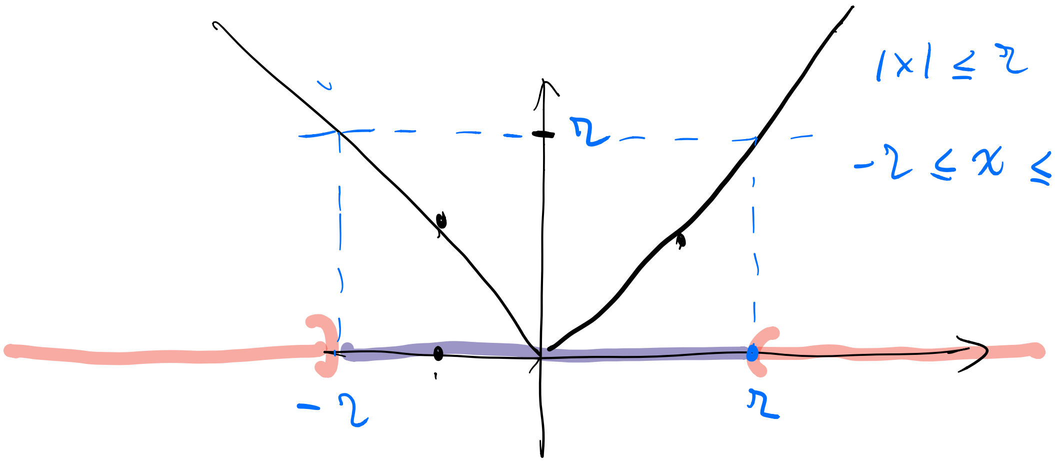
che, con i simboli introdotti nel paragrafo precedente, significa che la funzione inversa $f^{-1}(y)$ della funzione lineare $f(x) = mx + q$ è data da

(8.4) $$f^{-1}(y) = \frac{y-q}{m}.$$

Il *valore assoluto* (o *modulo*) di x, indicato con il simbolo |x|, è definito da

$$\boxed{(8.5)} \qquad |x| = \begin{cases} x & se \quad x \geq 0 \\ -x & se \quad x < 0 . \end{cases}$$

$$|x| = \max(x, -x)$$



$|x| \leq 2$

$-2 \leq x \leq 2$

Le seguenti proprietà sono diretta conseguenza della definizione (8.5):

(8.6) $\quad |x| \geq 0, \quad \forall\, x \in \mathbf{R};$

(8.7) $\quad |x| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0;$

(8.8) $\quad |-x| = |x|, \quad \forall\, x \in \mathbf{R};$

(8.9) $\quad |x_1 \cdot x_2| = |x_1| \cdot |x_2|, \quad \forall\, x_1, x_2 \in \mathbf{R};$

(8.10) $\quad |x_1 / x_2| = |x_1| / |x_2|, \quad \forall\, x_1, x_2 \in \mathbf{R},\ x_2 \neq 0.$

Diseguaglianza triangolare:

$$\big||x_1| - |x_2|\big| \leq |x_1 + x_2| \leq |x_1| + |x_2|$$

PROPOSIZIONE. — *Per ogni numero reale $r \geq 0$ valgono le equivalenze:*

$$|x| \leq r \quad \Leftrightarrow \quad -r \leq x \leq r; \tag{8.11}$$

$$|x| < r \quad \Leftrightarrow \quad -r < x < r. \tag{8.12}$$

Consideriamo la funzione *potenza con esponente* $n \in \mathbf{N}$:

$$f(x) = x^n \;, \tag{9.1}$$

che è definita, per ogni $x \in \mathbf{R}$, moltiplicando il numero x per se stesso n volte. La funzione f è strettamente crescente per $x \geq 0$, cioè:

$$0 \leq x_1 < x_2 \qquad \Rightarrow \qquad x_1^n < x_2^n \;. \tag{9.2}$$

cui $f(x) = x^n = y$. La condizione di stretta monotonia (9.2) implica, come osservato nel paragrafo 7, che la funzione è invertibile. Perciò è definita la funzione inversa di $f(x) = x^n$ $(x \geq 0)$, che si chiama funzione *radice n-sima*, e si indica con

$$f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x} = x^{1/n} \;, \qquad (x \geq 0). \tag{9.3}$$

I grafici delle funzioni (9.1), per $x \geq 0$, e (9.3) sono come in figura 1.12.

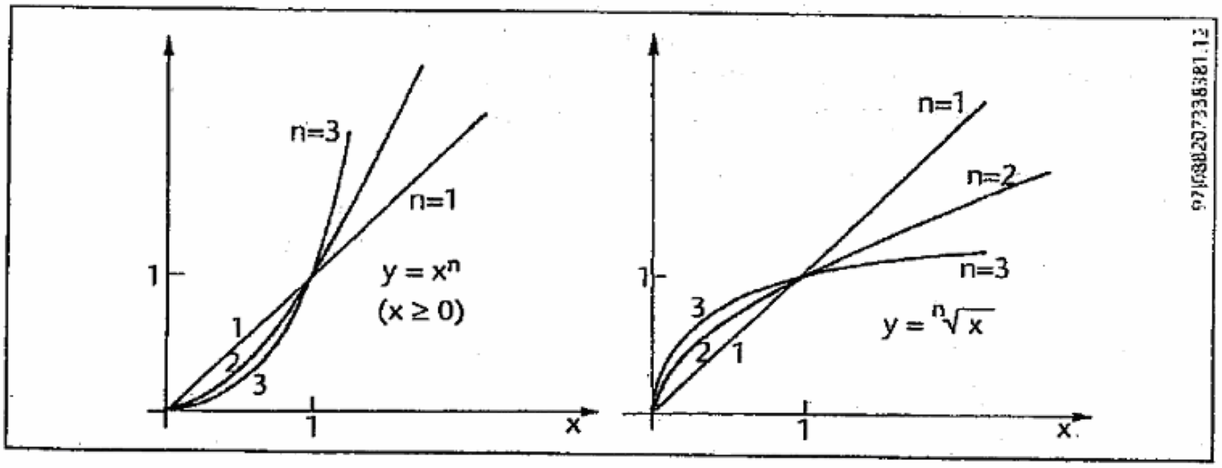


Figura 1.12

Per mezzo delle funzioni (9.1), (9.3) si può definire l'elevazione ad esponente razionale ($m, n \in \mathbf{N}$, $x \in \mathbf{R}$, $x > 0$) :

$$x^{m/n} = \sqrt[n]{x^m}\,, \qquad x^{-m/n} = 1/\sqrt[n]{x^m}\,, \qquad x^0 = 1. \tag{9.4}$$