Esercizio: Se f e g sono crescenti allora

① se $f(x) \geq 0$; $g(x) \geq 0$ $f \cdot g$ è crescente

② $f \circ g$ è crescente

③ Se f è invertibile e crescente $\Rightarrow$ f^{-1} è crescente

④ Se $f > 0$ è crescente allora $\frac{1}{f}$ è decrescente.

Dim: ① se $x_1 < x_2$ $f(x_1) \leq f(x_2)$ e $g(x_1) \leq g(x_2)$

quindi $f(x_1)g(x_1) \leq f(x_2)g(x_1) \leq f(x_2)g(x_2)$ $\boxtimes$

② se $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$ se $y_1 \leq y_2$ $g(y_1) \leq g(y_2)$

quindi se $x_1 < x_2 \Rightarrow g(f(x_1)) \leq g(f(x_2))$

$(y_1 = f(x_1)$; $y_2 = f(x_2))$ $\boxtimes$

③ Se $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

quindi se $\underset{f(x_1)}{\overset{\shortparallel}{y_1}} > \underset{f(x_2)}{\overset{\shortparallel}{y_2}}$

Non può essere $\underset{f^{-1}(y_1)}{\overset{\shortparallel}{x_1}} < \underset{f^{-1}(y_2)}{\overset{\shortparallel}{x_2}}$

d'altra conto dato che $y_1 \neq y_2$ Non può essere

$$f^{-1}(y_1) = f^{-1}(y_2)$$

QUINDI se $y_1 > y_2 \Rightarrow f^{-1}(y_1) > f^{-1}(y_2)$.

(4) $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2) \Leftrightarrow \frac{1}{f(x_1)} \leq \frac{1}{f(x_2)}$

Funzioni Potenza

$x \longrightarrow x^n$ (con n un numero naturale)

Consideriamo la funzione *potenza con esponente* $n \in \mathbf{N}$:

(9.1) $$f(x) = x^n ,$$

che è definita, per ogni $x \in \mathbf{R}$, moltiplicando il numero x per se stesso n volte. La funzione f è strettamente crescente per $x \geq 0$, cioè:

(9.2) $$0 \leq x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad x_1^n < x_2^n .$$

Si può dimostrare che

$$\mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+ \qquad (\text{ristretta a } x \geq 0)$$
$$x \longrightarrow x^n$$

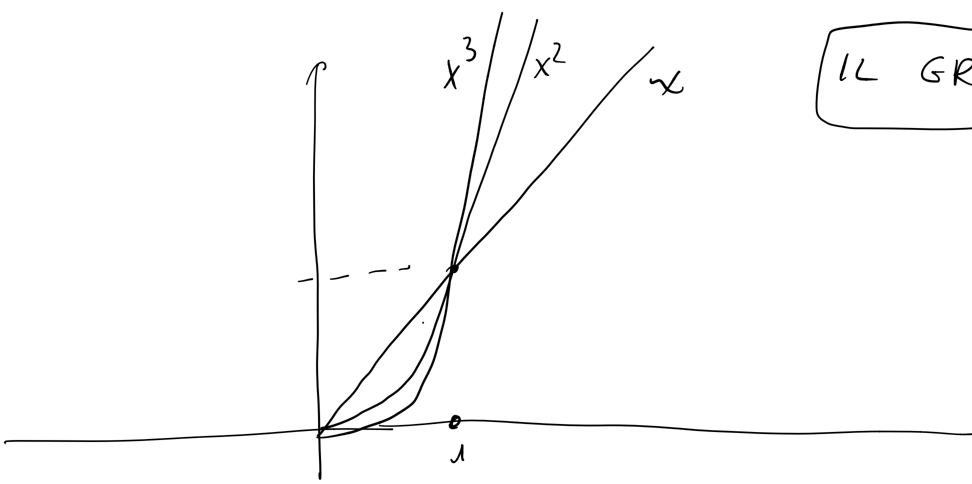
la funzione potenza è SURIETTIVA

cioè $\forall y > 0 \quad \exists x : \quad x^n = y$

QUINDI è invertibile

$$y = x^n \iff x = y^{\frac{1}{n}}$$

(per esempio nel caso di $n = 2$
un algoritmo per estrarre la radice
quadrata è dovuto a ERONE)



IL GRAFICO

NoTa se $n > m$ → $x^n > x^m$ se $x > 1$

↘ $x^n \leq x^m$ se $x \leq 1$

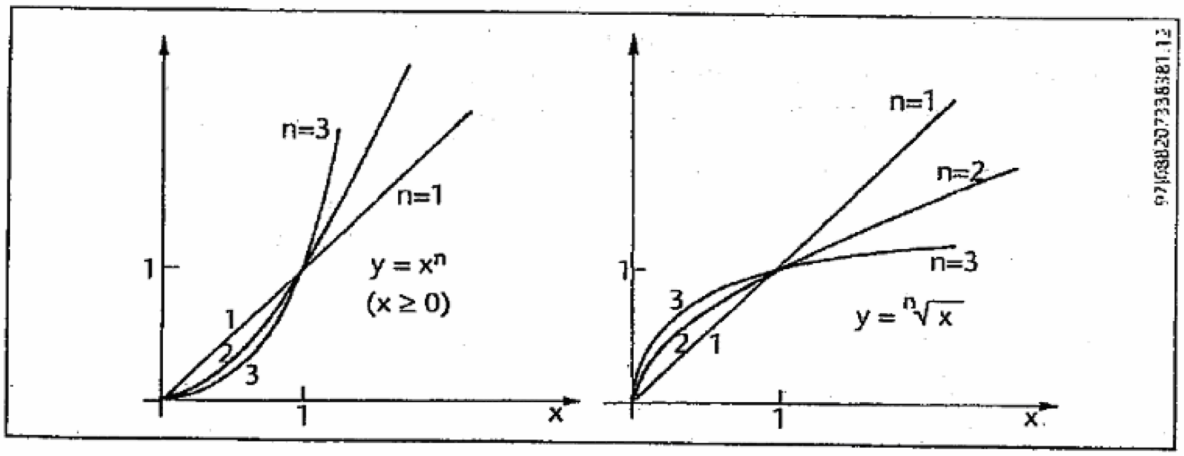
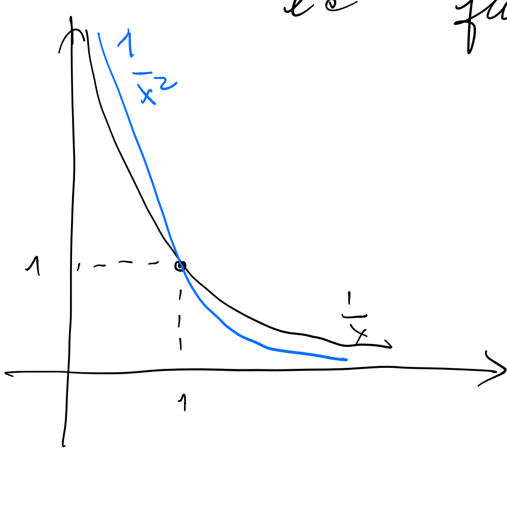


Figura 1.12

Per mezzo delle funzioni (9.1), (9.3) si può definire l'elevazione ad esponente razionale ($m, n \in \mathbf{N}$, $x \in \mathbf{R}$, $x > 0$) :

$$x^{m/n} = \sqrt[n]{x^m}\,, \qquad x^{-m/n} = 1/\sqrt[n]{x^m}\,, \qquad x^0 = 1. \tag{9.4}$$

la funzione $x \longrightarrow \frac{1}{x}$



A questo punto è stato definito il significato di a^b, con a numero reale positivo e b numero razionale. Utilizzando l'assioma di completezza è possibile estendere la definizione di a^b anche se l'esponente b è un numero reale non razionale, come vedremo nel paragrafo 10.

Proprietà:

(9.5) $$a^b \cdot a^c = a^{b+c}\ ; \qquad (a^b)^c = a^{b \cdot c}\ .$$

(9.6) $a^b > 0$. se $a > 1$ e $b > 0$; $a^b > 1$

$x_1 < x_2$ $\quad c > 0 \quad x_1^c > x_2^c$

$c < 0 \quad x_1^c < x_2^c$

(cioè x^c è $\nearrow$ se $c > 0$ e $\searrow$ se $c < 0$)

Posso anche considerare la funzione

$x \longrightarrow a^x$ purché $a > 0$

Se $x_1 > x_2$ $\quad a^{x_1} = a^{x_1 - x_2 + x_2} = a^{x_2} \cdot a^{(x_1 - x_2)}$

Se $a > 1$

per (9.6) $a^{(x_1 - x_2)} > 1$ quindi

$x_1 > x_2 \Rightarrow a^{x_1} > a^{x_2}$ $\quad a^x \nearrow$ se $a > 1$

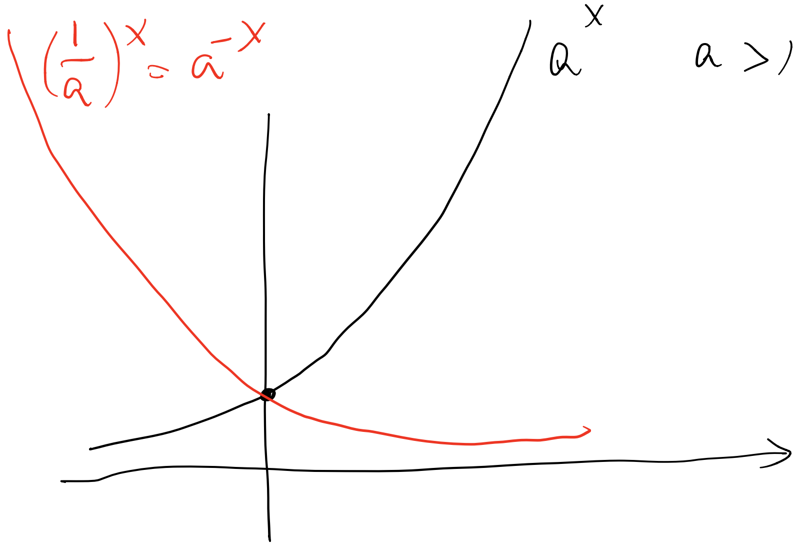
Se $a<1$ e $b>0$ $a^b<1$

(infatti allora $\frac{1}{a}>1$ e $\frac{1}{a^b}>1 \Leftrightarrow a^b<1$)

quindi (stesso ragionamento)

Se $a<1$ e $x_1>x_2$ $a^{x_1}<a^{x_2}$

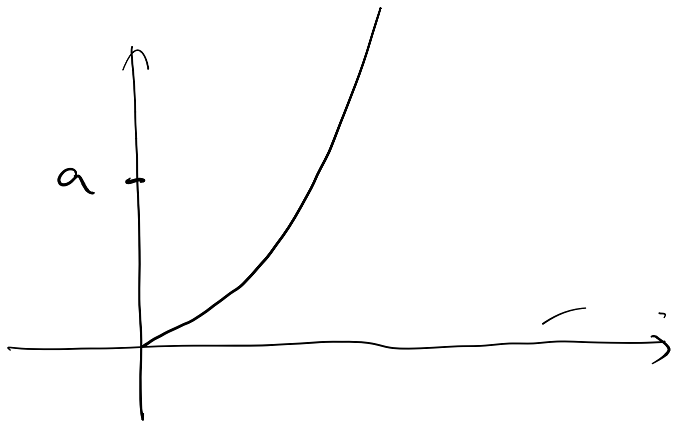
$a^x \searrow$ se $a<1$



IN PIÙ: un metodo (rozzo) per estrarre la radice quadrata

Voglio risolvere l'equazione $x^2=a$

($a\in\mathbb{R}$ è dato, x è l'incognita)

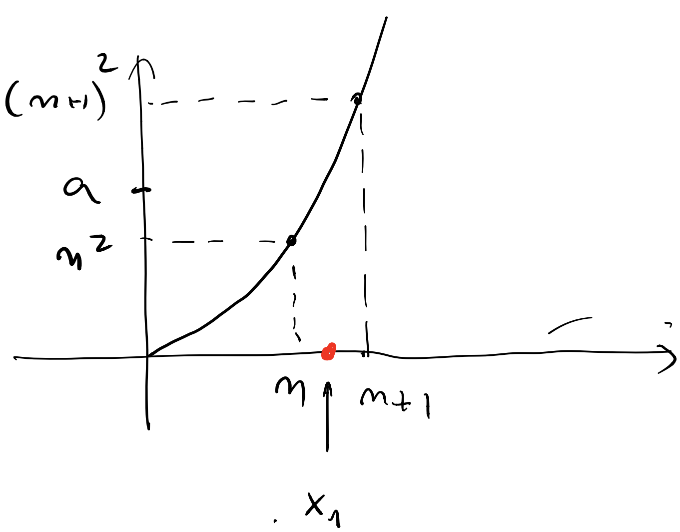


Se $a = n^2$ per n naturale è banale!

altrimenti

trovo n Naturale t.c. $n^2 < a < (n+1)^2$

$x_0 = n$

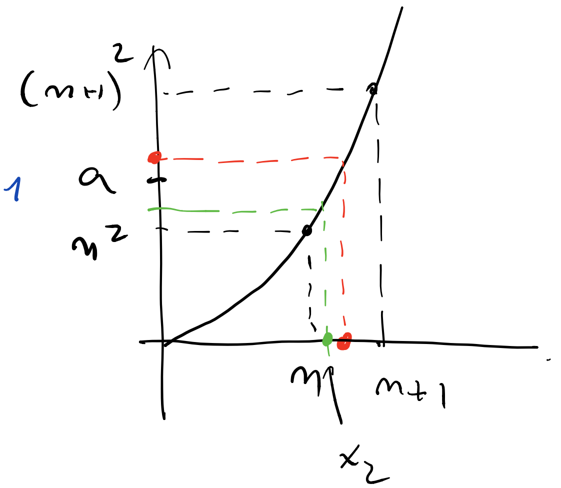


considero il punto medio $x_1 = \frac{2n+1}{2}$

se $x_1^2 = a$ allora $\sqrt{a} = x_1$

altrimenti o Ⓐ $x_1^2 < a$ o Ⓑ $x_1^2 > a$

nel disegno siamo



nel caso (B) $n < \sqrt{a} < x_1$

- considero il punto medio fra n e x_1

$$x_2 = \frac{n + x_1}{2}$$

Se fossimo nel caso (A) avrei sicuramente $x_1 < \sqrt{a} \leq n+1$ e porrei $x_2 = \dfrac{n+1+x_1}{2}$

continuo l'algoritmo

arrivo a conoscere

$\sqrt{a}$ con un errore

arbitrariamente piccolo!