A questo punto è stato definito il significato di a^b, con a numero reale positivo e b numero razionale. Utilizzando l'assioma di completezza è possibile estendere la definizione di a^b anche se l'esponente b è un numero reale non razionale, come vedremo nel paragrafo 10.

PROPRIETÀ:

(9.5) $a^b \cdot a^c = a^{b+c}$; $(a^b)^c = a^{b \cdot c}$.

(9.6) $a^b > 0$. se $a > 1$ e $b > 0$; $a^b > 1$

$x_1 > x_2$ $c > 0$ $x_1^c > x_2^c$

$c < 0$ $x_1^c < x_2^c$

(cioè x^c è $\nearrow$ se $c > 0$ e $\searrow$ se $c < 0$)

Posso anche considerare la funzione

$x \longrightarrow a^x$ purché $a > 0$

Se $x_1 > x_2$ $a^{x_1} = a^{x_1 - x_2 + x_2} = a^{x_2} \cdot a^{(x_1 - x_2)}$

Se $a > 1$

per (9.6) $a^{(x_1 - x_2)} > 1$ quindi

$x_1 > x_2 \Rightarrow a^{x_1} > a^{x_2}$ $a^x \nearrow$ se $a > 1$

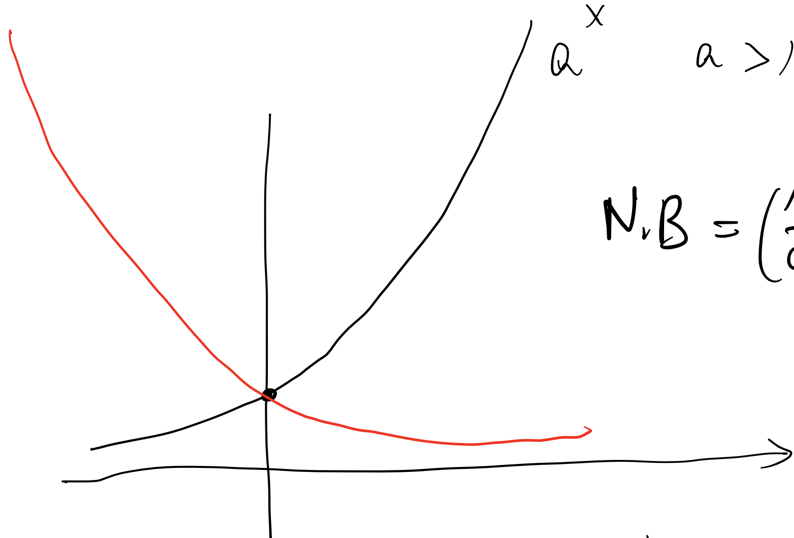
Se $a<1$ e $b>0$ $a^b<1$

(infatti allora $\frac{1}{a}>1$ e $\frac{1}{a^b}>1 \iff a^b<1$)

quindi (stesso ragionamento)

Se $a<1$ e $x_1>x_2$ $a^{x_1}<a^{x_2}$

$a^x \searrow$ se $a<1$



N.B. $= \left(\frac{1}{a}\right)^x = a^{-x}$

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$$

Se $a \neq 1$ $x \to a^x$ è

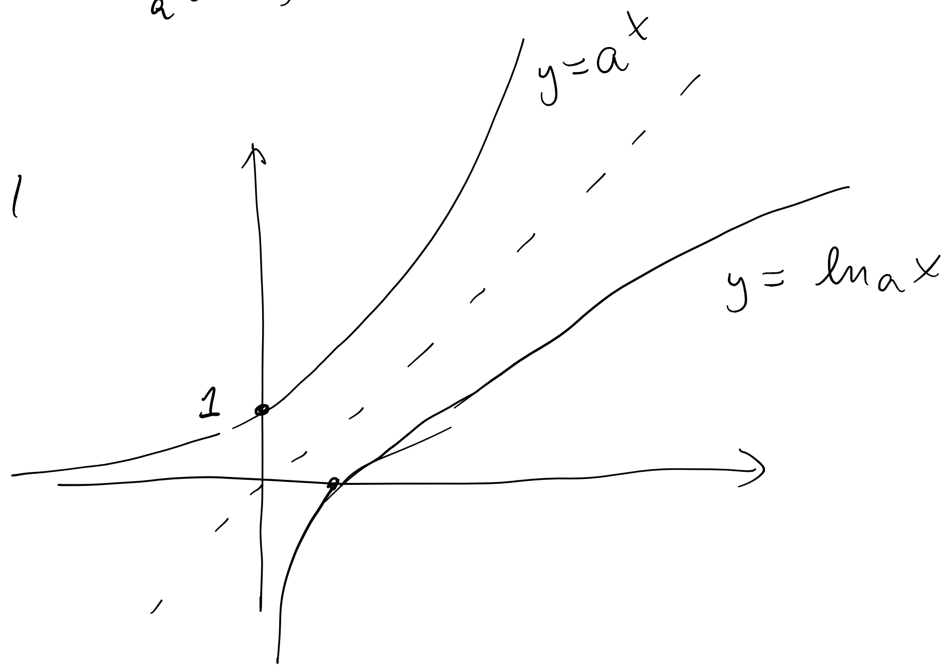
iniettiva e suriettiva $x \longrightarrow a^x$

$\Vert$

l'inversa è $\ln_a(y) \longleftarrow y$

$$x = \ln_a(a^x) = a^{\ln_a x}$$

$a > 1$



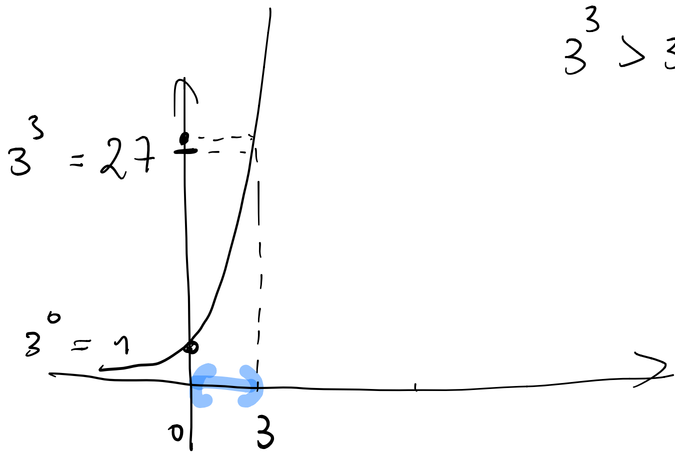
a^x è crescente $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+/\{0\}$

$\ln_a x$ è crescente $\mathbb{R}^+/\{0\} \to \mathbb{R}$

$$\{x \mid 1 < 3^x < 27\}$$

$1 = 3^0$ $\quad$ $27 = 3^3$ $\quad$ dato che

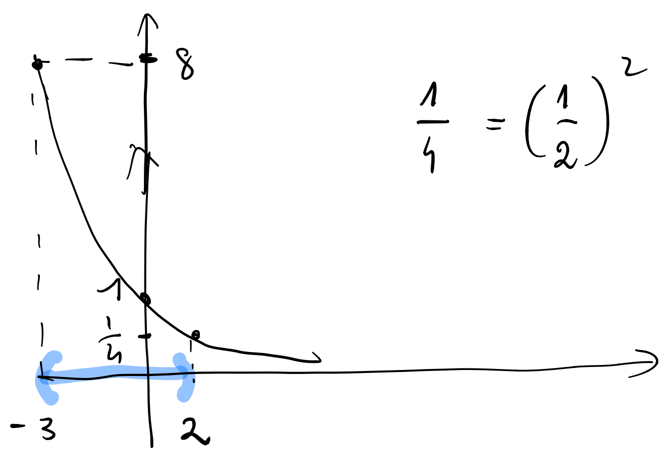
3^x è crescente $\Rightarrow 3^0 < 3^x$ se $0 < x$



$3^3 > 3^x$ se $3 > x$

quindi gli x: $1 < 3^x < 27 \Rightarrow 0 < x < 3$

Similmente $\frac{1}{4} < \left(\frac{1}{2}\right)^x < 8$



$\frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \quad 8 = 2^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$

$\left(\frac{1}{2}\right)^x$ è decrescente quindi

$\frac{1}{4} < \left(\frac{1}{2}\right)^x < 8 \iff -3 < x < 2$

$\left(\frac{1}{2}\right)^2 < \left(\frac{1}{2}\right)^x < \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$

$$2^x > \pi \quad \Rightarrow \quad \pi = 2^{\ln_2(\pi)}$$

$$2^x > \pi \quad \Rightarrow \quad x > \ln_2(\pi)$$

prop. dei logaritmi

① $\ln_a(x_1) + \ln_a(x_2) = \ln_a(x_1 x_2)$

② $\ln_a(x^b) = b \ln_a(x)$

Dimostro

① $x_1 = a^{\ln_a(x_1)}$; $x_2 = a^{\ln_a x_2}$

$$x_1 \cdot x_2 = a^{\ln_a(x_1) + \ln_a(x_2)}$$

$$\| $$

$$a^{\ln_a(x_1 x_2)} \qquad \blacksquare$$

② $$x^b = \left(a^{\ln_a x}\right)^b = a^{b \ln_a x}$$

$$\| $$

$$a^{\ln_a(x^b)} \qquad \blacksquare$$

$$x = a^{\ln_a x} = b^{\ln_b x} \qquad (\forall a, b)$$

d'altro canto $\quad b = a^{\ln_a b}$

quindi $\quad a^{\ln_a x} = \left(a^{\ln_a b}\right)^{\ln_b x} = a^{\ln_a b \cdot \ln_b x}$

ma quindi $\quad \ln_a x = \ln_a b \cdot \ln_b x$

$$\ln_4 x = \ln_4 2 \ \ln_2 x = \frac{1}{2} \ln_2 x$$

dato che $\quad 2 = 4^{\frac{1}{2}}$

$$\ln_{\frac{1}{2}} x = \ln_{\frac{1}{2}} 2 \ \ln_2 x = -\ln_2 x$$

in generale $\quad \ln_{\frac{1}{a}} x = -\ln_a x$