Il principio di induzione

PRINCIPIO DI INDUZIONE. — *Supponiamo che una proposizione dipendente da un indice* $k \in \mathbf{N}$ *sia vera per* $k = 1$ *e che inoltre, supposta vera per* n, *sia vera anche per il successivo* n + 1. *Allora la proposizione è vera per ogni* n $\in$ **N**.

Per esempio

Per ogni $n \geq 1$ la somma dei numeri naturali da 1 a k

vale $S_k = \frac{k(k+1)}{2}$

Verifichiamo che vale per $k = 1$

$1 = \frac{1 \cdot 2}{2}$ ok

ora supponiamo che sia vero fino ad n e verifichiamo che questo implica che vale anche per $k = n+1$

$$S_{n+1} = S_n + (n+1)$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} + n+1$$

$$= (n+1)\left(\frac{n}{2}+1\right) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

che è effettivamente $\frac{k(k+1)}{2}$

per $k = n+1$.

DISEGUAGLIANZA DI BERNOULLI. — *Per ogni numero reale* $x \geq -1$, *e per ogni naturale* n, *risulta*

(11.5) $$(1 + x)^n \geq 1 + nx.$$

Vale per $n = 1$ (vale l'uguaglianza!)

se $\quad (1+x)^n \geq 1+nx$

$$(1+x)(1+x)^n \geq (1+x)(1+nx) =$$

$$= 1+nx+x+nx^2$$

$$\geq 1+(n+1)x$$

(sto usando $nx^2 \geq 0$!)

… estremo superiore, estremo inferiore

Sia A un insieme di numeri reali. Il *massimo* di A, se esiste, è un numero M dell'insieme A che è maggiore od uguale ad ogni altro elemento dell'insieme. In simboli:

$$(12.1) \qquad \begin{matrix} \text{M massimo di A} \\ (\text{M} = \max \text{A}) \end{matrix} \iff \begin{cases} M \geq a, \ \forall\, a \in A; \\ M \in A. \end{cases}$$

Analogamente, il *minimo* di un insieme di numeri reali A, se esiste, è un numero m dell'insieme A che è minore od uguale ad ogni altro elemento di A. In simboli:

$$(12.2) \qquad \begin{matrix} \text{m minimo di A} \\ (\text{m} = \min \text{A}) \end{matrix} \iff \begin{cases} m \leq a, \ \forall\, a \in A; \\ m \in A. \end{cases}$$

Non tutti gli insiemi di numeri reali hanno il massimo ed il minimo. Ad esempio, se A è costituito da tutti i numeri reali positivi, A non ha né massimo, né minimo (non esiste il più piccolo numero reale positivo; ad esempio, lo zero non è il minimo, perché non appartiene ad A).

Es: dati $a<b$

sia $A: \{ x : a \leq x \leq b \}$

un intervallo con gli estremi INCLUSI

a è il MINIMO b è il MAX

di A

Invece l'intervallo $(a,b]$

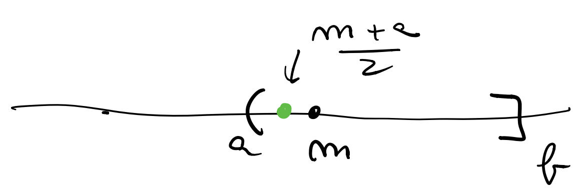
ha MASSIMO ma NON MINIMO!

infatti b è il max ma

il minimo dovrebbe essere un

valore $m \in (a,b]$ t.c. $m \leq x$

per ogni $x \in (a,b]$



$m \neq a$

dato che $m \in (a,b]$

(a è ESCLUSO!)

il punto

medio fra a e m

$\frac{m+a}{2} \in (a, b]$ e sicuramente è

più piccolo di m

quindi m NON PUÒ essere il MIN!

Si verifica facilmente che quando esistono, *il massimo o il minimo sono unici.* ~~Infatti, se M_1 e M_2 sono due massimi di un insieme A, allora ne~~

$$\text{(12.3)} \qquad A \textit{ limitato} \iff \exists\, \ell, L \in \mathbf{R}: \quad \ell \le a \le L, \ \forall\, a \in A.$$

Tenendo presente la definizione (8.5) della funzione valore assoluto, si riconosce facilmente che:

> PROPOSIZIONE. — *Un insieme* A *è limitato se e soltanto se esiste un numero positivo* M *tale che*
>
> $$\text{(12.4)} \qquad |a| \le M, \qquad \forall\, a \in A.$$

$$A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left\{ \frac{1}{n} \right\} = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots \right\}$$

Dimostrare che è LIMITATO

TEOREMA DI ESISTENZA DELL'ESTREMO SUPERIORE. — *Supponiamo che A sia un insieme non vuoto di numeri reali limitato superiormente. Allora esiste il minimo dell'insieme dei maggioranti di A.*

Infatti, indichiamo con B l'insieme costituito dai maggioranti di A. B è non vuoto, perché A è limitato superiormente. Applichiamo l'assioma di completezza (2.11) ai due insiemi A, B. Esiste un numero reale M tale che

$$a \le M \le b, \qquad \forall\, a \in A, \qquad \forall\, b \in B. \tag{12.7}$$

Dato che M è maggiore od uguale a tutti gli elementi di A, M è un maggiorante di A; cioè $M \in B$. Inoltre M è minore od uguale a tutti gli elementi di B. Quindi, in base alla definizione (12.2), M è il minimo di B.

In base al teorema precedente, poniamo la seguente

DEFINIZIONE DI ESTREMO SUPERIORE. — *Sia A un insieme di numeri reali non vuoto e limitato superiormente. Diciamo che* $M \in \mathbf{R}$ *è l'estremo superiore di A se M è il minimo dei maggioranti di A.*

Ciò equivale a dire che M è un maggiorante, e che ogni numero più piccolo di M, diciamo $M - \varepsilon$ con ε positivo, non è un maggiorante; cioè $M - \varepsilon$ è minore di qualche elemento dell'insieme A. In simboli ($\exists$ si legge esiste):

$$\begin{matrix} M \textit{ estremo superiore di } A \\ (M = \sup A) \end{matrix} \iff \begin{cases} M \ge a, \ \forall\, a \in A; \\ \forall\, \varepsilon > 0, \exists\, a \in A \colon M - \varepsilon < a. \end{cases} \tag{12.8}$$

Analogamente, si verifica che se A è un insieme non vuoto di numeri reali limitato inferiormente, allora l'insieme dei minoranti di A ha massimo. In tali condizioni, si dice che un numero m è l'*estremo inferiore* di A se m è il *massimo dei minoranti* di A. Ciò equivale a:

$$\begin{matrix} m \textit{ estremo inferiore di } A \\ (m = \inf A) \end{matrix} \iff \begin{cases} m \le a, \ \forall\, a \in A; \\ \forall\, \varepsilon > 0, \exists\, a \in A \colon m + \varepsilon > a. \end{cases} \tag{12.9}$$

Per esempio (a, b)

se $M \geq b$ allora M è un maggiorante

quindi il più piccolo dei maggioranti

è $= b \Leftrightarrow \sup(a, b) = b$

allo stesso modo $\inf(a, b) = a$!

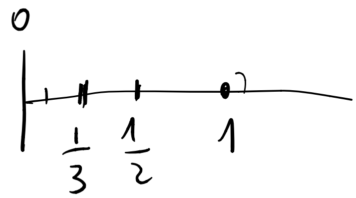
Per esempio in $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots \frac{1}{n}\}$

l'estremo superiore $\equiv$ MASSIMO

(N.B se un insieme ha un MAX

allora l'estremo superiore $\equiv$ MASSIMO)

$$\inf_{n \in \mathbb{N}} \left(\frac{1}{n} \right) = 0$$



infatti $\forall n \quad \frac{1}{n} \geq 0$

(quindi zero è un <u>minorante</u>)

Posso trovare un minorante > 0 ?

No! $\forall \varepsilon > 0$ se n è sufficientemente grande si ha

$0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$ (quindi NON c'è nessun $\varepsilon > 0$ che sia un MINORANTE)