Spazi simplettici NOTAZIONE COMPLESSA

i Se ho uno spazio di Hilbert $H, \langle , \rangle$

posso dotare la sua "realizzazione"

di una struttura simplettica.

(Uno sp. vettoriale su $\mathbb{C}$ lo posso sempre

vedere come sp. su $\mathbb{R}$.)

Se è separabile e $\{f_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ è una base

$\left(H = \overline{\operatorname{span}_{\mathbb{C}}(f_i)} \right)$ allora la realizz. di H

ha come base $\{ f_j, \, i f_j \}$

ho $u = \sum u_i f_i = \sum \operatorname{Re}(u_i) f_i + i \operatorname{Im}(u_i) f_i$

$H_{\mathbb{R}}$ ha come prodotto scalare $\operatorname{Re}(\langle , \rangle)$

e come forma simplettica $\omega(\cdot,\cdot) = \operatorname{Im}(\langle \cdot, \cdot \rangle)$

Verifica che soddisfano le queste ipotesi

per un prodotto scalare e forma simplettica

Esempio $\mathbb{C}^n$ $\langle u, v\rangle = \sum_{j=1}^{n} u_j \bar{v}_j$

$z \in \mathbb{C}^n$ base canonica $\underline{e}_i$ (è una base anche come spazio reale)

$$z = \frac{(p + iq)}{\sqrt{2}} \qquad q, p \in \mathbb{R}^n$$

$$u = \frac{1}{\sqrt{2}}(p + iq) \qquad v = \frac{1}{\sqrt{2}}(P + iQ)$$

$$(u, v) = \frac{1}{2} \mathrm{Re} \sum (p_j + iq_j)(P_j - iQ_j)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_j q_j Q_j + p_j P_j \qquad \frac{1}{2} \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Q \\ P \end{pmatrix}$$

$$\omega(u, v) = \frac{1}{2} \sum q_j P_j - p_j Q_j$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q \\ P \end{pmatrix}$$

quindi è la struttura simplettica standard

$f: \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ la posso pensare come

$$F(u) = f\left(\frac{u + \bar{u}}{\sqrt{2}}, \frac{u - \bar{u}}{\sqrt{2}i}\right)$$

in questo modo se f è differenziabile

posso definire $\frac{\partial}{\partial u_j} F(u) := \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial}{\partial p_j} - i\frac{\partial}{\partial q_j}\right) f$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{u}_j} := \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial}{\partial p_j} + i\frac{\partial}{\partial q_j}\right)$$

le equazioni di Hamilton si scrivono

in modo pulito $h(p,q) \rightsquigarrow H(u) = h\left(\frac{u+\bar{u}}{\sqrt{2}}, \dots\right)$

$$\dot{q} = \frac{\partial h}{\partial p} \qquad \begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{pmatrix} = J\nabla h$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial h}{\partial q}$$

diventa $\dot{u} = i\frac{\partial H}{\partial \bar{u}}$ ✓

$$\left[\frac{\dot{p}_j + i\dot{q}_j}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{\partial h}{\partial q_j} + i\frac{\partial h}{\partial p_j}\right) = i\left(\frac{\partial}{\partial p_j} + i\frac{\partial}{\partial q_j}\right)H\right.$$

Dopo aver scritto le Hamiltoniane

come funzioni di u $\rightsquigarrow$ posso usare la stessa

notazione su i campi vettoriali

$$x(p,q) = \sum x^{(1)}(p,q)\frac{\partial}{\partial p} + x^{(2)}(p,q)\frac{\partial}{\partial q}$$ diventa

$$X(u) = \sum_J X^{(J,+)}(u)\frac{\partial}{\partial u_J} + X^{(J,-)}(u)\frac{\partial}{\partial \bar{u}_J}$$

dove $X^{J,+}(u) = \overline{X^{J,-}(u)} = \frac{x^{(1)} + i x^{(2)}}{\sqrt{2}}$

il c.v. agisce su $H(u)$

$$X[H] = \sum_J X^{J,+}_J \frac{\partial H}{\partial u_J} + X^{(J,-)}\frac{\partial H}{\partial \bar{u}_-}$$

$$\omega(X,Y) = 2\,\mathrm{Im}\left(\sum X^J \bar{Y}^J\right) = -i\sum X^{J,+}Y^{J,-} - X^{J,-}Y^{J,+}$$

REM $H: \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ spazio simplettico REALE)

sulle uno forme $du = \frac{dp + i\,dq}{\sqrt{2}}$

$dp \wedge dq = i\, du \wedge d\bar{u}$ $\left[\, du_i\left(\frac{\partial}{\partial u_i}\right) = 1 \,\right]$

$\left(du \wedge d\bar{u} = \frac{1}{2}(dp + i\,dq) \wedge (dp - i\,dq) = dp \wedge dq \quad \checkmark \right)$

Il campo vettoriale hamiltoniano si definisce

$$dH(\cdot) = \omega(X_H, \cdot)$$

$$\sum \frac{\partial H}{\partial u_j} Y^{j,+} + \frac{\partial H}{\partial \bar{u}_j} Y^{j,-} = 2\,\mathrm{Im}\,(X_H \bar{Y})$$

$$= \sum_J \frac{X_H^{J+} Y^{J-} - X_H^{J,-} Y^{J+}}{i} \qquad X_H^{+,J} = i \frac{\partial H}{\partial \bar{u}_J}$$

(coerentemente a quello che si era detto prima)

le parentesi di Poisson:

$$\{F, G\} = dF(X_G) = \omega(X_F, X_G)$$

$$= i \sum_J \frac{\partial F}{\partial u_J}\frac{\partial G}{\partial \bar{u}_J} - \frac{\partial F}{\partial \bar{u}_J}\frac{\partial G}{\partial u_J}$$

[Rem: $\omega(X, Y) = 2\,\mathrm{Im}\left(\sum X^J \bar{Y}^J\right) =$

$-i \sum_J X^{J,+} Y^{J,-} - X^{J,-} Y^{J,+}$]

quindi $\dot{u} = \{u, H\}$ è la dinamica

Ci sono molti vantaggi ad usare queste notazioni vicino ai punti fermi ellittici

Una hamiltoniana quadratica in forma normale ELLITTICA

$$\sum \lambda_J (p_J^2 + q_J^2) \longrightarrow \frac{1}{2} \sum \lambda_J |u_J|^2$$

$$\dot{u}_J = i \lambda_J u_J \qquad u_J = e^{i\lambda_J t} u_J(0)$$

Chiamo monomi $\quad u^\alpha \bar{u}^\beta = \prod_{J=1}^{n} u_J^{\alpha_J} \bar{u}_J^{\beta_J}$

$$\left\{ \sum \lambda_J |u_J|^2 , u^\alpha \bar{u}^\beta \right\} = \lambda \cdot (\alpha - \beta) u^\alpha \bar{u}^\beta$$

Vediamo in dimensione infinita

$$L^2(\mathbb{R}) \qquad \langle u, v \rangle = \int u(x) \bar{v}(x) \, dx$$

$$(u, v) = 2 \operatorname{Re} \int u \bar{v} \, dx$$

$$\omega(u, v) = 2 \operatorname{Im} \int u \bar{v} \, dx = \int \frac{u \bar{v} - \bar{u} v}{i} \, dx$$

Dentro a $L^2(\mathbb{R})$ prendo uno spazio (x es H^3) e su questo spazio voglio le eq. di Hamilton di

$$H(u) = \int |\partial_x u|^2 \, dx$$

$$dH(u)[v] = \int \left(\partial_x u \, \partial_x \bar{v} + \partial_x \bar{u} \, \partial_x v \right) dx$$

$$= -\int \partial_{xx} u \, \bar{v} + \partial_{xx} \bar{u} \, v \, dx$$

$$= \int \frac{-i \partial_{xx} u \, \bar{v} - \overline{-i \partial_{xx} u} \, v}{i} = \omega(-i \partial_{xx} u, v)$$

quindi le eq. di Hamilton sono

$$\dot{u} = -i \, u_{xx} \qquad (\text{Schrödinger})$$

Nota Bene se $u_0(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}_0(\xi) e^{i \xi x} d\xi$

abbastanza regolare

$$u(t, x) = \int \hat{u}_0(\xi) \, e^{i(\xi x + \xi^2 t)} \, d\xi$$

quindi se $u_0(x) \in H^p \longrightarrow u(t, x) \in H^p \ \forall t$

— · — · — · — · —

Io lavoreró sempre su spazi separabili

(di Hilbert o Banach) contenuti in $\ell_2(\mathbb{C})$

Consideró Hamiltoniane

ANALITICHE E REGOLARI

Partiamo dai Polinomi

In un # finito di variabili

parto da $f(p,q) = \sum_{|h|+|k|\leq N} f_{hk}\, p^h q^k$

$$\mathcal{P}(u) = \sum_{hk} f_{hk} \left(\frac{u+\bar{u}}{\sqrt{2}}\right)^h \left(\frac{u-\bar{u}}{\sqrt{2}}\right)^k = \sum_{|\alpha|+|\beta|\leq N} P_{\alpha\beta}\, u^\alpha \bar{u}^\beta$$

NOTA BENE.

se penso $f : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$

(resta un polinomio) $f(p,q)$

poi prendo $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}$ $\qquad \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \mathcal{L} \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}$

(cambiamento LINEARE su $\mathbb{C}^2$)

$f \circ L$ è ancora un polinomio in z, w

e naturalmente $f \circ L \begin{pmatrix} u \\ \bar{u} \end{pmatrix} = \mathcal{P}(u)$

quindi chiamo $\mathcal{P}(u)$ un POLINOMIO

di grado massimo N.