Abbiamo discusso una struttura simplettica e le parentesi di Poisson.

Abbiamo parlato della hamiltoniana $H \to \mathbb{R}$

e nel caso $H = \mathbb{C}^n$ abbiamo definito i monomi

$$u^\alpha \bar{u}^\beta = M(\alpha, \beta)$$

e quindi i Polinomi

$$\sum P_{\alpha\beta} u^\alpha \bar{u}^\beta \qquad \text{con} \qquad P_{\alpha\beta} = \overline{P_{\beta\alpha}}$$

$$\operatorname{Span}_{\mathbb{R}} \left(\operatorname{Re} u^\alpha \bar{u}^\beta, \operatorname{Im} u^\alpha \bar{u}^\beta \right)$$

Ci siamo concentrati su $H = \mathbb{C}^n$ ma comunque in generale data $f : H_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ differenziabile posso definire

$$X_f \in H_{\mathbb{R}} \quad \text{t.c.} \quad df(v) = \omega(X_f, v)$$

e posso definire le parentesi di Poisson

$$\{f, g\} = \omega(X_f, X_g) \Rightarrow \{f, g\} = -2 \operatorname{Im} \langle \nabla_{\bar{u}} f, \nabla_{\bar{u}} g \rangle$$

N.B. $\quad X_F = i \nabla_{\bar{u}} f$

Noi spesso saremo interessati a funzioni Hamiltoniane definite su un sottospazio $E \subset H$ in quel caso $f: E_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$

non è detto che $\forall v \in E$

$$df[v] = \omega(X_f, v) \quad \text{con} \quad X_f \in E$$

esempio: l'eq. di Schrodinger dell'altra volta

$$H = L^2(\mathbb{R}) \qquad E = H^3(\mathbb{R})$$

$$h(u) = \int_{-\infty}^{\infty} |u_x|^2 \, dx \qquad dh[v] = -\int_{-\infty}^{\infty} u_{xx}\bar{v} + \bar{u}_{xx} v$$

$$X_h(u) = -u_{xx} \quad \text{mappa } H^3 \to H^1$$

Partendo dalla def. dei polinomi su $\mathbb{C}^n$ voglio costruire delle def che funzionano in generale

Polinomi omogenei

$$\sum_{|\alpha|+|\beta|=d} P_{\alpha\beta} u^\alpha \bar{u}^\beta = P(u)$$

(omogenea di grado d e C^d)

REM. la derivata è sempre rispetto alla struttura reale.

$$\prod_j \left(\frac{\partial}{\partial u_j}\right)^{\alpha_j} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{u}_j}\right)^{\beta_j} P(u) = P_{\alpha\beta}\ \alpha!\,\beta!$$

In generale ho 2 gradi $d_1 = |\alpha|$ e $d_2 = |\beta|$

Per definizione $P(u)$ è un polinomio in omogeneo di grado d_1, d_2 se esiste un operatore

$$\underbrace{E \times E \times E \times \dots E}_{d_1} \times \underbrace{E \times E \times E}_{d_2} \to \mathbb{R}$$

simmetrico in E^{d_1} e E^{d_2} separatamente

d_1-lineare in E^{d_1} d_2-ANTI lineare in E^{d_2}

t.c. $p = u = M(\underbrace{u, \dots, u}_{d_1}, \underbrace{\bar{u}, \dots \bar{u}}_{d_2})$

Nota Bene. Se ho un polinomio $P(u)$ per calcolare $M(u_1, \dots, u_{d_1}, v_1, \dots v_{d_2})$ identità di Polarizzazione

$$M(u_1, \dots u_{d_1}, v_1, \dots v_{d_2}) =$$

$$\frac{1}{2^m m!} \sum_{\varepsilon_i = \pm 1} \varepsilon_1 \dots \varepsilon_m \, P\left(\sum \varepsilon_i x_i \right)$$

Naturalmente i polinomi sono un'algebra rispetto al prodotto e il grado di omogeneità la dota di una struttura di algebra graduata. La norma questa (in una palla) è

$$|P| = \sup_{u \in B_r} \left(P(u) \right) = r^d \sup_{u \in B_1} \left(P(u) \right)$$

$(d = d_1 + d_2)$

Noi però NON siamo interessati alle Hamiltoniane come funzioni ma piuttosto come generatrici dei cambiamenti di coordinate simplettiche. Quindi do una definizione diversa di Norma e di Grado che rispetta la struttura di ALGEBRA di LIE dei campi vettoriali

$$P(u) = 2 \operatorname{Re} \left[M(u, \dots, u, \bar{u}, \dots \bar{u}) \right]$$

$$dP(u)[h] = d_1 M(h, \underbrace{u,\dots,u}_{d_1-1}, \underbrace{\bar u,\dots,\bar u}_{d_2}) + d_2 M(\underbrace{u,\dots,u}_{d_1}, \bar h, \underbrace{\bar u \dots}_{d_2-1})$$

$$2\,\mathrm{Im}\,\langle iM, h\rangle = 2\,\mathrm{Re}\,\langle M(u^{d_1}, \bar u^{d_2-1}), h\rangle$$

$X_P^{(+)} = iM(u^{d_1}, \bar u^{d_2-1})$ è omogeneo di grado d_1, d_2-1

se guardo l'equazione

$\dot u = X_P(u)$ e riscalo $u \rightsquigarrow \lambda u$

$(\bar u \rightsquigarrow \bar\lambda \bar u)$

$\Downarrow$

$\dot u = \lambda^{d_1-1} \cdot \bar\lambda^{d_2-1} X_P(u)$

Definizione $P(u)$ ha "scaling" d

se $P(u) = \sum_{|\alpha|+|\beta| = d+2} P_{\alpha\beta} u_\alpha \bar u_\beta$

"scaling" $d \longleftrightarrow$ grado omogeneo $d+2$

<u>Osservazione</u>: se P ha scaling p

e Q scaling q

$\{P, Q\}$ ha scaling $p+q$

a questo punto la norma naturale è

$$\|P\|_r = \frac{1}{r} \sup_{|u| \le r} |X_{P(u)}|_E = r^d \sup_{|u| \le 1} |X_{P(u)}|_E$$

Come spesso succede in dim finita

Non cambia granché a scegliere norme diverse

in dim ∞ invece bisogna stare attenti

Per esempio se $E = h_p$ $\quad p > 1$

$H = \sum |j| \, |u_j|^2$ è un polinomio di grado 2

D'altro canto NON è vero che

$X_H = i|j| u_j$ è una mappa lineare

<u>CONTINUA</u> da $h_p \to h_p$!

(la norma del campo vettoriale è più

forte)

Anche nella convergenza totale il fatto che io faccia la norma operatoriale sull'op. omogeneo è importante: esempio pensiamo ai polinomi

$$h_p(\mathbb{Z}, \mathbb{C}) \longrightarrow h_p(\mathbb{Z}\mathbb{C})$$

Un polinomio si può sempre rappresentare come

$$\sum_{|\alpha|+|\beta|\leq N} P^{(J)}_{\alpha\beta}\, u^{\alpha}\bar{u}^{\beta}$$

(Non è una somma finita!))

a questo punto potrebbe essere ragionevole pensare di definire

$$\|P\| = \Big| \sum |P_{\alpha\beta}| \sup_{u\in B_1} u^{\alpha}\bar{u}^{\beta} \Big|_{h_p}$$

l'identità avrebbe norma ∞!

anche solo passare ai moduli NON è

innocuo!

- Legame fra norma del polinomio e dell'operatore multilineare.

(per l'identità di polarizzazione)

$$\sup_{|u|\le 1} |A| \le \sup_{|u_i|\le 1} M(u_1, \dots u_m) \le \frac{m^m}{m!} |A|$$

Su uno spazio di Hilbert

le NORME COINCIDONO!

(Dineen. Complex analysis on infinite dim spaces)

Quindi in uno spazio di Hilbert

$$\| \{F, G\} \| = r^{d_f + d_g} \sup_{|u|\le 1} \| dX_F(X_G) - dX_G(X_F) \|_E$$

$$\le 2(d_f + d_g) \| F \| \| G \|$$

Def: FUNZIONI ANALITICHE

Ora Supponiamo di avere

devo far vedere la convergenza puntuale

$$F = \sum F_d(u) \qquad F_d \text{ di grado } d$$

t.c. $\|F\|_r := \sum_d \|F_d(u)\| = \sum_d r^d \|F_d\|_1$

Chiamo le funzioni di questo tipo $\mathcal{H}_r(E)$

Nota Bene $r\|F\|_r$ cresce in r

inoltre se F non ha termini lineari allora $\|F\|_r \nearrow r$.

TEOREMA (stime di CAUCHY)

date $H, K \in \mathcal{H}_{r_1}(E)$

(vedi fene per dim. e osservazion)

$$\{H, K\} = \sum_{d_1, d_2} \{H_{d_1}, K_{d_2}\}$$

$$\|\{H,K\}\|_r \leq 2\sum (d_1+d_2)\|H_{d_1}\|_r \|K_{d_2}\|_r \leq$$

$(r < r_1)$

$$2\sum (d_1+d_2)\left(\frac{r}{r_1}\right)^{d_1+d_2} \|H_{d_1}\|_{r_1} \|H_{d_2}\|_{r_1}$$

ma

$$\sup_d d\left(\frac{1}{1+\delta}\right)^d = \frac{1}{\ln(1+\delta)} \sim \frac{1}{\delta}$$

ora se pongo $r_1 = r+\rho$ $\quad \delta = \frac{r+\rho}{r} - 1 = \frac{\rho}{r}$

quindi

$$\| \{H, K\} \|_r \leq \frac{2}{\rho} \|H\|_{r+\rho} \|K\|_{r+\rho}$$

STIMA DI CAUCHY

Perché ci tengo:

Abbiamo detto che se S è una hamiltoniana su $E \subset \mathcal{H}$ (lo spazio di Hilbert su cui abbiamo definito la struttura simplettica) se $\dot{u} = X_S(u)$ è localmente ben posto su E

(quindi definisce un flusso $\Phi_S(t, v) \in E$

allora l'azione del flusso sulle Hamiltoniane è

$$H(t) = H(\Phi_S(t, v))$$

$$* \begin{cases} \dot{H} = \{H, S\} \\ H(0) = H(v) \end{cases}$$

Ora se H è analitica e limitata

(secondo la def di norma?

$$\mathrm{ad}\,S : H \longrightarrow \{H, S\}$$

è un operatore lineare "continuo"

quindi se è ben definito

$$e^{t\,\mathrm{ad}\,S} H(v) \quad \text{è soluzione di } *$$

ma per UNICITÀ deve essere

$$H(\phi_S(t, v)) = e^{t\,\mathrm{ad}\,S} H(v)$$

$$\left[\text{N.B} \quad e^{t\,\mathrm{ad}\,S} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k (\mathrm{ad}\,S)^k H}{k!} \right]$$

Quindi devo dimostrare

① Che $e^{t\,\mathrm{ad}\,S}$ è ben definito

② che X_S definisce un flusso su E
(al meno localmente in t)

Lemma 2.1 (Hamiltonian flow). *Let $0 < \rho < r$, and $S \in \mathcal{H}_{r+\rho}(E)$ with*

$$|S|_{r+\rho} \leq \delta := \frac{\rho}{4e(r+\rho)}. \tag{2.2}$$

Then the time 1-Hamiltonian flow $\Phi_S^1 : B_r(\mathrm{h_w}) \to B_{r+\rho}(\mathrm{h_w})$ is well defined, analytic, symplectic with

$$\sup_{u \in B_r(E)} \left|\Phi_S^1(u) - u\right|_{E} \leq (r+\rho)|S|_{r+\rho} \leq \frac{\rho}{4e}. \tag{2.3}$$

For any $H \in \mathcal{H}_{r+\rho,\eta}(\mathrm{h_w})$ we have that $H \circ \Phi_S^1 = e^{\{S,\cdot\}}H \in \mathcal{H}_{r,\eta}(\mathrm{h_w})$ and

$$\left|e^{\{S,\cdot\}}H\right|_{r} \leq 2|H|_{r+\rho} \tag{2.4}$$

$$\left|\left(e^{\{S,\cdot\}} - \mathrm{id}\right)H\right|_{r} \leq \delta^{-1}|S|_{r+\rho}|H|_{r+\rho} \tag{2.5}$$

$$\left|\left(e^{\{S,\cdot\}} - \mathrm{id} - \{S,\cdot\}\right)H\right|_{r} \leq \frac{1}{2}\delta^{-2}|S|^2_{r+\rho}|H|_{r+\rho} \tag{2.6}$$

More generally for any $h \in \mathbb{N}$ and any sequence $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ with $|c_k| \leq 1/k!$, we have

$$\left|\sum_{k\geq h} c_k \,\mathrm{ad}_S^k(H)\right|_{r} \leq 2|H|_{r+\rho}\left(|S|_{r+\rho}/2\delta\right)^h, \tag{2.7}$$

where $\mathrm{ad}_S(\cdot) :=$ $\{\cdot, S\}$.

Dimostriamo prima che X_S genera un flusso

Appendix B. Proofs of the Main Properties of the Norms

Lemma B.1. *Let $0 < r_1 < r$. Let E be a Banach space endowed with the norm $|\cdot|_E$. Let $X : B_r \to E$ a vector field satisfying*

$$\sup_{B_r} |X|_E \leq \delta_0.$$

Then the flow $\Phi(u,t)$ of the vector field[27] *is well defined for every*

$$|t| \leq T := \frac{r - r_1}{\delta_0}$$

and $u \in B_{r_1}$ with estimate

$$|\Phi(u,t) - u|_E \leq \delta_0|t|, \qquad \forall |t| \leq T.$$

---

27 Namely the solution of the equation $\partial_t\Phi(u,t) = X(\Phi(u,t))$ with initial datum $\Phi(u,0) = u$.

Proof. Fix $u \in B_{r_1}$. Let us first prove that $\Phi(u, t)$ exists $\forall\, |t| \leq T$. Otherwise there exists a time[28] $0 < t_0 < T$ such that $|\Phi(u, t)|_E < r$ for every $0 \leq t < t_0$ but $|\Phi(u, t_0)|_E = r$. Then, by the fundamental theorem of calculus

$$\Phi(u, t_0) - u = \int_0^{t_0} X(\Phi(u, \tau))d\tau. \tag{B.1}$$

Therefore

$$\begin{aligned} r - r_1 \leq |\Phi(u, t_0)|_E - |u|_E \leq |\Phi(u, t_0) - u|_E \leq \int_0^{t_0} |X(\Phi(u, \tau))|_E d\tau \leq \delta_0 t_0 \\ < \delta_0 T = r - r_1, \end{aligned}$$

which is a contradiction. Finally, for every $|t| \leq T$,

$$|\Phi(u, t) - u|_E \leq \left| \int_0^t |X(\Phi(u, \tau))|_E d\tau \right| \leq \delta_0 |t|.$$

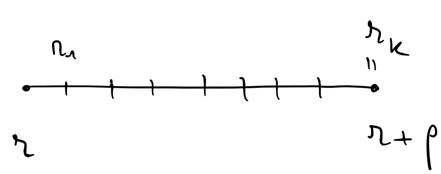
□

~~*Proof of Lemma 2.1.* For brevity we set, for every $r' > 0$~~

Per dimostrare il Lemma 2.1

procedo per induzione

$$H_k = ad^k(S)[H] = ad\, S\, [H_{k-1}]$$



definisco

$$r_j = r + \frac{j\rho}{k}$$

$$|H_k|_r \leq 2\frac{r}{r_1 - r} |S|_{r_1} |H_{k-1}|_{r_1}$$

$$\leq 4 \frac{r \cdot r_1}{(r_1 - r)(r_2 - r_1)} |S|_{r_1} |S|_{r_2} |H_{k-2}|_{r_2}$$

$$\leq 2^k \frac{k^k}{\rho^k} r \prod_{i=1}^{k-1} r_i |S|_{r_i} |H|_{r+\rho}$$

(Rem. $\quad r_i \cdot |S|_{r_i} \leq r+\rho |S|_{r+\rho}$)

$$|H_k|_r \leq \left(\frac{2k}{\rho}\right)^k r\, (r+\rho)^{k-1} |S|^k_{r+\rho} \, |H|_{r+\rho}$$

One $\quad \frac{k^k}{k!} \leq e^k \quad$ (Stirling)

$$|e^{\mathrm{ad}S} H|_r \leq \sum \frac{1}{k!} |H_k|_r \leq \sum_k \left[2e \frac{(r+\rho)}{\rho} |S|_{r+\rho}\right]^k H_{r+\rho}$$

se $\quad 2e\left(1+\frac{r}{\rho}\right)|S|_{r+\rho} < \frac{1}{2} \quad$ ottengo

tutte le stime che volevo in Lemma 2.1. $\blacksquare$

In conclusione dato H $\langle , \rangle$ sp. di Hilbert considero la sua realizzazione ($H_{\mathbb{R}}$) come spazio simplettico reale.

dato $E \subset H$ uno spazio di Hilbert definisco $\mathcal{H}_r(E)$ lo spazio delle Hamiltoniane regolari

$$h(u) = \sum_{d=-1}^{\infty} h_d(u) \qquad \text{in } B_r$$

dove h_d sono polinomi omogenei di grado di omogeneità $= d+2$

e $\displaystyle\sum_{d=-1}^{\infty} \| h_d(u) \|_r < \infty$

Teorema

Lo spazio delle hamiltoniane regolari

è un algebra di Banach-Poisson ed è un algebra di Lie graduata rispetto allo scaling degree.

① Parentesi di Poisson.

La prima cosa da fare è dimostrare che se $\sum |f_d|_r < \infty$ allora $f(u) = \sum f_d(u)$ è ben definita $\forall\, u \in B_r$ e inoltre

$$\sum_{d \geq N} |f_d(u)| \xrightarrow[N \to \infty]{} 0$$

Ora data

$$f(u) = \sum_{d=-1}^{\infty} f_d(u)$$

$$g(u) = \sum_{d=-1}^{\infty} g_d(u)$$

Definisco

$$\{f,g\} := \lim_{N,M\to\infty} \left\{ \left(\sum_{d=-1}^{N} f_d \right), \sum_{D=-1}^{M} g_D \right\}$$

$$= \lim_{N,M\to\infty} \sum_{d=-1}^{N} \sum_{D=-1}^{M} \{f_d, g_D\}$$

voglio mostrare che questo esiste e coincide con

$$\lim_{K\to\infty} \sum_{k=-1}^{K} \sum_{d+D=k} \{f_d, g_D\}$$

e $\left(\{f,g\}\right)_k = \sum_{d+D=k} \{f_d, g_D\}$

① posto $h(x) = \sum_{k} \sum_{d+D=k} \{f_d, g_D\}$

mostro $|h|_r \leq \frac{4}{-\ln\left(1-\frac{r_1-r}{r}\right)} |f|_{r_1} |g|_{r_1}$

ora faccio le differenze

fra $\sum_{k \leq K} h_k$ è $\sum_{d=-1}^{N} \sum_{D=-1}^{M} \{ f_d, g_D \}$

con $K = N + M$ e questo va a zero.