- Abbiamo definito i Polinomi regolari
- Abbiamo introdotto una struttura di

Algebra di Lie graduata rispetto allo scaling dopo

Posso chiamare $\mathcal{P}$ i polinomi regolari

$$\mathcal{P} = \bigoplus \mathcal{P}^d \qquad (\text{polinomi con scaling } = d)$$

se $P \in \mathcal{P}^d$ e $Q \in \mathcal{P}^D$ allora

$$\{P, Q\} \in \mathcal{P}^{d+D}$$

ho introdotto una NORMA su $\mathcal{P}^d$ $\quad (d \geq -1)$

$$|P|_r = \sum_{d_1+d_2=d} \sup_{|u|_E \leq r} |X_{P_{d_1,d_2}}(u)| = \sum |M_{d_1,d_2}|_{op}\, r^d$$

se E è Hilbert

$$|\{P, Q\}|_r \leq (d+D+2)\,|P|_r\,|Q|_r$$

Definizione: $\mathcal{L} : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ si dice un operatore di grado d se $\forall h$ $\quad \mathcal{L} : \mathcal{P}^h \longrightarrow \mathcal{P}^{h+d}$

per esempio

$$\mathcal{L}_P[Q] = \{Q, P\} \qquad \text{con } P \in \mathcal{P}^d$$

Oss. se $\mathcal{L}$ ha grado negativo è NILPOTENTE

su $\mathcal{P}^{\le h} = \bigoplus_{k \le h} \mathcal{P}^{k} \quad \forall h$

(ordine)

$\mathcal{P}^{(d)}$ ~ omogenei scala d $\quad \mathcal{P}^{\le d} = \bigoplus_{k \le d} \mathcal{P}^{k} \;;\; \mathcal{P}^{\ge d} = \bigoplus_{k \ge d} \mathcal{P}^{k}$

Funzioni Analitiche

Data la serie formale $f(u) = \sum_{d=1}^{\infty} f_d(u)$

con $f_d(u) \in \mathcal{P}^{(d)}$ e tale che

$|f|_r := \sum_d |f_d(u)|_r < \infty$ è Analitica regolare in $B_r(E)$

$\mathcal{H}_r = \overline{\bigoplus \mathcal{P}^{(d)}}$

ha una struttura di ALGEBRA filtrata

$H_r^{\ge d}(E) = \overline{\bigoplus_{h \ge d} \mathcal{P}^{(h)}}$ (stesso per $>h$)

$H_r = \mathcal{P}^{\le d} \oplus H_r^{>d}$

Teorema:

① $\sum f_d(u)$ è puntualmente convergente

①b il campo vettoriale $X_f = i \sum_d M_d(u)$ è punt. convergente

② se $f, g \in \mathcal{H}_{r_1}(E)$ allora $\{f,g\} \in \mathcal{H}_r(E)$

$$(\{f,g\})_d = \sum_{d_1+d_2=d} \{f_{d_1}, g_{d_2}\} \qquad \forall\ \frac{r_1}{e} < r < r_1$$

$$|\{f,g\}|_r \leq \sup_{x \geq -1} (x+2)\left(\frac{r}{r_1}\right)^x |f|_{r_1} |g|_{r_1}$$
$$\leq \frac{e\,r}{r_1 - r} |f|_{r_1} |g|_{r_1}$$

Def: Dico che $\mathcal{L} : \mathcal{H}_{r_1} \longrightarrow \mathcal{H}_r$ ha ordine d

se $\mathcal{L} : \mathcal{P}^h \longrightarrow \mathcal{H}_r^{\geq h+d}$ (è come $o(\ )$)

sono interessata in operatori $\mathcal{L} = \sum_{k \geq d}^{\infty} \mathcal{L}_k$

con $\mathcal{L}_k$ di grado k (e con una somma convergente)

$\mathcal{L}_k : \mathcal{P}^h \longrightarrow \mathcal{P}^{h+k}$

Flusso Hamiltoniano.

Appendix B. Proofs of the Main Properties of the Norms

Lemma B.1. *Let $0 < r_1 < r$. Let E be a Banach space endowed with the norm $|\cdot|_E$. Let $X : B_r \to E$ a vector field satisfying* and analytic.

$$\sup_{B_r} |X|_E \leq \delta_0.$$

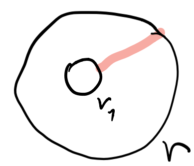
$\boxed{\dot{u} = X(u)}$ é loc. ben posto

Then the flow $\Phi(u,t)$ of the vector field[27] *is well defined for every*

$r_1 < r$

$$|t| \leq T := \frac{r - r_1}{\delta_0}$$

and $u \in B_{r_1}$ with estimate



$$|\Phi(u,t) - u|_E \leq \delta_0 |t|, \qquad \forall |t| \leq T.$$

27 Namely the solution of the equation $\partial_t \Phi(u,t) = X(\Phi(u,t))$ with initial datum $\Phi(u,0) = u$.

Dim. per esercizio (se do per scontato che il prob. di Cauchy è localmente ben posto allora vedi AM 550_2)

Abbiamo detto che se S è una hamiltoniana su $E \subset H$ (lo spazio di Hilbert su cui abbiamo definito la struttura simplettica

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} u_\tau = X_S(u) \\ u(0) = v \end{cases}$$

è localmente ben posto su E

(quindi definisce un flusso $\phi_S(\tau, v) \in E$

allora l'azione del flusso sulla Hamiltoniana è

$$H(t, v) = H(\phi_S(t, v))$$

$$* \begin{cases} \dot{H} = \{H, S\} =: ad_S(H) \\ H(0) = H(v) \end{cases}$$

Ora se H è analitica e limitata (secondo la def di prima)

$$ad\, S : H \longrightarrow \{H, S\}$$

è un operatore lineare "continuo" (si deduce r)

quindi ponendo

$$e^{t\,\mathrm{ad}S} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k (\mathrm{ad}S)^k H}{k!}$$

se ho convergenza totale (è una serie di potenze)

$$\frac{d}{dt} e^{t\,\mathrm{ad}S} = \sum \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} (\mathrm{ad}S)^k H = \left\{ \sum \frac{t^h}{h!} (\mathrm{ad}S)^h H, S \right\}$$

$$= \left\{ e^{t\,\mathrm{ad}S} H, S \right\}$$

quindi

$e^{t\,\mathrm{ad}S} H(v)$ è soluzione di $*$

ma per UNICITÀ deve essere

$$H(\phi_S(t,v)) = e^{t\,\mathrm{ad}S} H(v)$$

Lemma 2.1 (Hamiltonian flow). *Let $0 < \rho < r$, and $S \in \mathcal{H}_{r+\rho}(E)$ with*

$$|S|_{r+\rho} \le \delta := \frac{\rho}{8e(r+\rho)}. \tag{2.2}$$

Then the time 1-Hamiltonian flow $\Phi^1_S : B_r(E) \to B_{r+\rho}(E)$ is well defined, analytic, symplectic with

1
$$\sup_{u \in B_r(E)} \left|\Phi^1_S(u) - u\right|_E \le (r+\rho)|S|_{r+\rho} \le \frac{\rho}{8e}. \tag{2.3}$$

2 *For any $H \in \mathcal{H}_{r+\rho,\eta}(E)$ we have that $H \circ \Phi^1_S = e^{\{S,\cdot\}}H \in \mathcal{H}_{r}(E)$ and*

$$\left|e^{\{S,\cdot\}}H\right|_{r} \le 2|H|_{r+\rho} \tag{2.4}$$

$$\left|\left(e^{\{S,\cdot\}} - \mathrm{id}\right)H\right|_{r} \le \delta^{-1}|S|_{r+\rho}|H|_{r+\rho} \tag{2.5}$$

$$\left|\left(e^{\{S,\cdot\}} - \mathrm{id} - \{S,\cdot\}\right)H\right|_{r} \le \frac{1}{2}\delta^{-2}|S|^2_{r+\rho}|H|_{r+\rho} \tag{2.6}$$

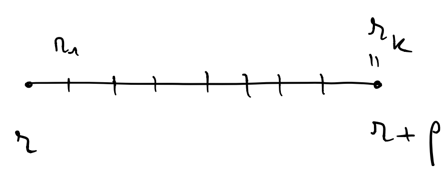
More generally for any $h \in \mathbb{N}$ and any sequence $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ with $|c_k| \le 1/k!$, we have

$$\left|\sum_{k\ge h} c_k \,\mathrm{ad}^k_S(H)\right|_{r} \le 2|H|_{r+\rho}\left(|S|_{r+\rho}/2\delta\right)^h, < \left(\frac{1}{2}\right)^h \tag{2.7}$$

where $\mathrm{ad}_S(\cdot) :=$ $\{\cdot, S\}$

procedo per induzione

$$H_k = \mathrm{ad}^k(S)[H] = \mathrm{ad}\,S\,[H_{k-1}]$$



definisco

$$r_j = r + \frac{j\rho}{k}$$

$$|H_k|_r \le C\frac{r}{r_1 - r}|S|_{r_1}|H_{k-1}|_{r_1}$$

$$\leq C^2 \frac{r \cdot r_1}{(r_1-r)(r_2-r_1)} |S|_{r_1} |S|_{r_2} |H_{k-2}|_{r_2}$$

$$\leq C^k \frac{k^k}{\rho^k} r \prod_{i=1}^{k-1} r_i |S|_{r_i} |H|_{r+\rho}$$

(Rem. $r_i |S|_{r_i} \leq r+\rho |S|_{r+\rho}$)

$$|H_k|_r \leq \left(\frac{Ck}{\rho}\right)^k r (r+\rho)^{k-1} |S|^k_{r+\rho} |H|_{r+\rho}$$

Ora $\frac{k^k}{k!} \leq e^k$ (Stirling)

$$|e^{\mathrm{ad} S} H|_r \leq \sum \frac{1}{k!} |H_k|_r \leq \sum_k \left[Ce \frac{(r+\rho)}{\rho} |S|_{r+\rho} \right]^k H_{r+\rho}$$

se $Ce \left(1+\frac{r}{\rho}\right) |S|_{r+\rho} < \frac{1}{2}$ ottengo tutte le stime del Lemma! ∎

Spazi di successioni

Se lavoro su H spazio di Hilbert separabile

ho una norma + forte $H \leftrightarrow \ell^2(\mathbb{C})$

la base $\Rightarrow$ $\underline{e}_j = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow j$ $\quad u = \sum u_j \underline{e}_j$

quindi qualsiasi operatore multilineare continuo si

rappresenta $M(u_1, \dots, u_{d_1}, v_1, \dots, v_{d_2}) \rightsquigarrow$

$$M_{\vec{i},\vec{j}} = M(\underline{e}_{i_1}, \underline{e}_{i_2}, \dots \underline{e}_{i_{d_1}}, \underline{e}_{j_1}, \dots e_{j_{d_2}})$$

$$M(u_1, \dots, u_{d_1}, v_1, \dots, v_{d_2}) = \sum_{\vec{i},\vec{j}} M_{\vec{i}\vec{j}} \, u_{1i_1} u_{2i_2} u_{3i_3} \cdots v_{1j_1} v_{2j_2} \cdots$$

quindi un Polinomio $\rightsquigarrow \sum M_{\vec{i}\vec{j}} \, u_{\vec{i}} \, \bar{u}_{\vec{j}}$

dove

$$u_{\vec{i}} = u_{i_1} u_{i_2} u_{i_3} \cdots u_{i_{d_1}} \qquad \bar{u}_{\vec{j}} = \bar{u}_{j_1} \bar{u}_{j_2} \cdots \bar{u}_{j_{d_2}}$$

Non è una notazione comoda perché $\vec{i}$ può avere

vere componenti uguali tra loro

$\vec{i} = (1, 1, 3, 2) \rightsquigarrow u \quad u_1 \cdot u_1 u_3 \cdot u_2$

poi devo simmetrizzare

È più conveniente scrivere

$$P(u) = \sum_{\alpha,\beta \in \mathbb{N}_f^{\mathbb{Z}}} P_{\alpha\beta}\, u^\alpha \bar{u}^\beta \qquad u^\alpha = u_1^{\alpha_1} u_2^{\alpha_2} \cdots u_N^{\alpha_N}$$

$$\mathbb{N}_f^{\mathbb{Z}} = \mathbb{N}^{\mathbb{Z}} \cap \ell_1 \equiv \left\{ \alpha_i \in \mathbb{N}_0 : \sum_{i \in \mathbb{Z}} \alpha_i < \infty \right\}$$

$u_{\vec{i}} \leftrightarrow u^\alpha$ $\qquad \alpha_1 = \{\text{cardinalità di } 1 \text{ in } \vec{i}\}$

$\alpha_2 = \{\text{card. di } 2 \text{ in } \vec{i}\}$

etc..

Ora come sottospazi di H considero scale di spazi di Sobolev.

$$h_p := \left\{ u \in \ell_2 \quad ; \ |u|_p^2 := \sum |u_j|^2 \langle j \rangle^{2p} < \infty \right\}$$

o più in generale dato un peso w

$$w = (w_j)_{j \in \mathbb{Z}} \quad : \quad w_j > 0 \ ; \ w_{j_1} > w_{j_2} \text{ se } |j_1| \geq |j_2|$$

$$w_j \to \infty \text{ se } |j| \to \infty \quad ; \quad w_j = w_{-j}$$

$$h(w) := \left\{ u \in \ell_2 : \ |u|_w^2 = \sum |u_j|^2 w_j^2 < \infty \right\}$$

<u>Esercizio:</u> Posto $(u * v)_J = \sum u_h v_{J-h}$

Dimostrare che

$$H(u) = (u * u * \bar{u} * \bar{u})_0 \in \mathcal{P}^{(2)}(h_p) \quad \forall p > \frac{1}{2}$$

Norme di Maggioranti

Una volta data una rappresentazione "Matriciale" degli operatori multilineari simmetrici posso definire l'operatore "maggiorante di Cauchy"

$$M \rightsquigarrow M_{\vec{i},\vec{J}} \rightsquigarrow |M_{\vec{i},\vec{J}}|$$

se l'operatore multilineare definito da

$$\underline{MM}(u_1, \dots, u_{d_1}, v_1, \dots, v_{d_2}) := \sum_{\vec{i},\vec{J}} |M_{\vec{i}\vec{J}}| \, u_{1i_1} u_{2i_2} u_{3i_3} \cdots v_{1J_1} v_{2J_2} \cdots$$

è CONTINUO (limitato)

dico che M è "majorant bounded"

[illegible] ([illegible]) "[illegible]"

, oppure (minimo) normalmente analitiche

Def:

$\mathcal{P}$ è normalmente regolare (M-regolare) se $\forall_{d_1 d_2}$ $\underline{X}_{P_{d_1,d_2}}$ è continuo a quel punto definisco come norma MAGGIORANTE di $\mathcal{P}(u) \rightsquigarrow X_p(u) = iM(u) : E \to E$

$$|\underline{P}|_r := r^d \, |\underline{X}_P|_1 = r^d \|\underline{M}\|_{op}$$

Nota che $\|\underline{X_P}\| = \|X_{\underline{P}}\|$

$M : E \to E$ si identifica con

$$M^{(h)}_{\vec{i},\vec{j}} \quad \Leftrightarrow \quad M = \left(M^{(h)}\right)_{h \in \mathbb{Z}}$$

$$M^{(h)} : E \to \mathbb{R} \qquad \underline{M} \rightsquigarrow \left|M^{(h)}_{\vec{i},\vec{j}}\right|$$

Tutti i conti diventano espliciti

$$\mathcal{P}(u) = \sum \mathcal{P}_{\alpha\beta} \, u^\alpha \bar{u}^\beta \qquad \mathcal{P}_{\alpha\beta} = \overline{\mathcal{P}_{\beta,\alpha}}$$

$$X_P^{(h)} = i \sum \mathcal{P}_{\alpha\beta} \, \beta_h \, u^\alpha \bar{u}^{\beta - \underline{e}_h} \qquad \underline{X}_P^{h} = \sum |P_{\alpha,\beta}| \beta_h u^\alpha \bar{u}^{\beta - e_h}$$

per calcolare $\underline{M}$ $\rightsquigarrow$ polarizzazione

Secondo la definizione dell'altra volta devo raccogliere $\sum_{\substack{\alpha,\beta: \\ |\alpha|=d_1 \\ |\beta|=d_2}} |P_{\alpha\beta}| \beta_h \, u^\alpha \bar{u}^{\beta-e_h}$ da questo estrarre M_{d_1,d_2-1}

calcolare la norma operatoriale

Ma dato che E è Hilbert

$$|M_{d_1 d_2}|_{op} = \sup_{|u|\leq 1} \Big| \sum_{\substack{\alpha,\beta: \\ |\alpha|=d_1 \\ |\beta|=d_2}} |P_{\alpha\beta}| \beta_h \, u^\alpha \bar{u}^{\beta-e_h} \Big|_E$$

$$= \sup_{|u|\leq 1} \Big| \sum_{\substack{\alpha,\beta: \\ |\alpha|=d_1 \\ |\beta|=d_2}} |P_{\alpha\beta}| \beta_h \, |u|^{\alpha+\beta-e_h} \Big|_E$$

Nota Bene. il sup si ottiene sempre su $u_J \in \mathbb{R}_+ \ \forall J$!

quindi $$|P|_1 = \sum_{d_1+d_2=d+2} \sup_{|u|=1} \Big| \sum_{\substack{\alpha,\beta: \\ |\alpha|=d_1 \\ |\beta|=d_2}} |P_{\alpha\beta}| \beta_h \, |u|^{\alpha+\beta-e_h} \Big|_E$$

Ovviamente $|P|_r \le |\underline{P}|_r$

A volte si mette il sup davanti alla somma.

CAVEAT: Non si può portare il sup dentro alla somma delle $|\ |_E$. esempio $\mathrm{Id}: h_p \to h_p$

$$\Big| \sup_{|u| \le 1} u_j \Big|_E = |\langle j\rangle^{-p}|_E = \sum_j \langle j\rangle^{2p} \frac{1}{\langle j\rangle^{2p}} = \infty!$$

Lemma: la norma dei maggioranti è ordinata $\Rightarrow |H_{\alpha,\beta}| \le |K_{\alpha,\beta}| \quad (H \preceq K)$

implica che $|\underline{H}|_r \le |\underline{K}|_r$

Lemma: Se $P \in \mathcal{P}^{(d)}$ e $Q \in \mathcal{P}^{D}$ allora $\underline{\{P, Q\}} \in \mathcal{P}^{(d+D)}$ con la stima

$$|\underline{\{P,Q\}}|_1 \le (d+D+2)\, |\underline{P}|_1 |\underline{Q}|_1$$

Conviene usare la def. con gli operatori multilineari ricordando che il sup si ottiene su $u_j \ge 0$.

inoltre su $E = h(W)$ su una comp. omogenea

$$\sum_{\substack{|\alpha|=d_1 \\ |\beta|=d_2}} P_{\alpha\beta}\, u^\alpha \bar{u}^\beta \rightsquigarrow \underline{X}_P^{(j,+)} = \sum |P_{\alpha,\beta}|\, \beta_j\, u^\alpha \bar{u}^{\beta-e_j}$$

$$\left(\text{Rem } \bar{X}_P^{(j,-)} = X_P^{(j,+)}\right)$$

$$|\underline{X}_P|_E = \sup_{|u|_W \le 1} \sum_j w_j^2 \left(\sum |P_{\alpha,\beta}|\, \beta_j\, u^\alpha \bar{u}^{\beta-e_j}\right)^2$$

pongo $v_j = w_j u_j$ se $u \in h(W) \to v \in \ell^2$

$$\sup_{|v|_{\ell_2} \le 1} \sum_j \left(\frac{w_j^2}{\prod w_i^{\alpha_i+\beta_i}}\right)^2 \left(\sum |P_{\alpha,\beta}|\, \beta_j\, v^\alpha \bar{v}^{\beta-e_j}\right)^2$$

quindi $$|P|_{d_1,d_2} = \sup_{|v|_{\ell_2} \le 1} \left| Y_{d_1 d_2}(P,w)\right|_{\ell_2}$$

$$Y^{(j)}(P,w) = \sum_{\substack{\alpha,\beta \\ |\alpha|=d_1 \\ |\beta|=d_2}} \underbrace{\frac{w_j^2}{w^{\alpha+\beta}} |P_{\alpha,\beta}|\, \beta_j}_{:= c_w(\alpha,\beta,j)} v^\alpha \bar{v}^{\beta-e_j}$$

ora se ho due pesi w e $\tilde{w}$

se $\sup \dfrac{c_w(\alpha,\beta,j)}{\quad} < A$

α,β,J $\qquad C_{W'}(\alpha,\beta,J)$

allora $\quad \forall \; H \in \mathcal{P}^d(W') \quad$ si ha $\quad H \in \mathcal{P}^d(W)$

con $\quad |H|_W \leq A\,|H|_{W'}$.