Appello A - AM220

14 luglio 2019

Ogni risposta va accuratamente motivata. Non si possono usare: libri, appunti, congegni elettronici, etc.

1. Sia ω la forma differenziale definita da

$$\omega(x,y,z) = \left\{ \frac{2xz}{x^2+y^2} + y^2 e^z \right\} dx + \left\{ \frac{2yz}{x^2+y^2} + 2xye^z \right\} dy + \left\{ \log(x^2+y^2) + xy^2 e^z \right\} dz$$

determinare il dominio massimale. Si dica se la forma è chiusa e se è esatta in tale dominio. Calcolare l'integrale di ω lungo la curva γ definita da

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \mathrm{sen}(t) \\ t \end{pmatrix}, \qquad t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right].$$

Soluzione: La forma è definita per $(x,y) \neq (0,0)$ (quindi $\mathbb{R}^3$ meno una retta). Questo dominio non è semplicemente connesso. La forma però è esatta dato che (per calcolo diretto) una sua primitiva è:

$$f(x,y,z) := z\log(x^2+y^2) + xy^2 e^z$$

Quindi

$$\int_\gamma \omega = f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \pi/4\right) - f(1,0,0)$$

2. Sia D il dominio

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 \le x - 2y \le 1\,, \quad 1 \le 2x + y \le 2\right\}.$$

Disegnare D, calcolare l'integrale

$$\int_D e^{x-2y} \log(2x+y) dxdy \,.$$

Dato il campo vettoriale $F = (x^2+y^2, 3y^2)$ verificare il teorema della divergenza, cioè che

$$\int_D \mathrm{div}(F) dxdy = \int_{\partial D} F \cdot \hat{n} ds \,.$$

Soluzione: Il dominio in questione è un rettangolo. Applichiamo il cambiamento di variabili lineare:

$$u = x - 2y \,, \quad v = 2x + y$$

(il determinante della matrice associata è 5) ottengo quindi

$$\int_D e^{x-2y} \log(2x+y) dxdy = \frac{1}{5} \int_0^1 e^u du \int_1^2 \log(v) dv$$

Per quel che riguarda la seconda parte dell'esercizio si nota che $\mathrm{div}(F) = 2x + 6y = 2v - 2u$ quindi

$$\int_D (2x+6y) dxdy = \frac{2}{5} \int_0^1 du \int_1^2 (v-u) dv$$

Calcoliamo ora l'integrale a secondo membro; si tratta di dividere il rettangolo in quattro segmenti:

$$S_1 := \{x-2y = 0 \,, 1 \leq 2x+y \leq 2\} \qquad S_2 := \{x-2y = 1 \,, 1 \leq 2x+y \leq 2\} \ldots$$

Parametrizziamo il primo segmento, per esempio

$$x = 2t \,, y = t \,, \quad 1 \leq 5t \leq 2$$

il vettore tangente è $v = (2,1)$ il vettore normale $n = (-1,2)$ quindi

$$\int_{S_1} F \cdot \hat{n} ds = \int_{1/5}^{2/5} (-5t^2 + 6t^2) dt$$

3. Si consideri la successione di funzioni $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f_n(x) = x \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n \qquad x \in \mathbb{R}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

- Si determini il limite puntuale $f(x)$ della successione $\{f_n(x)\}$.
- Si stabilisca se la successione $\{f_n\}$ converga uniformemente in $\mathbb{R}$.

Soluzione: Per ogni $x \in \mathbb{R}$ limite puntuale è $f(x) = xe^{-x^2}$.
Per verificare l'eventuale convergenza uniforme bisogna calcolare

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} |x\left(\left(1-\frac{x^2}{n}\right)^n - e^{-x^2}\right)|$$

é facile vedere che $\sup_{x\in\mathbb{R}} x\left(\left(1-\frac{x^2}{n}\right)^n - e^{-x^2}\right) \geq n((1-n)^n - e^{-n^2})$ quindi non c'è convergenza uniforme.

4. Trovare i coefficienti di Fourier della funzione

$$f(x) = |\sin(x)| - \sin x\,.$$

Si tratta di una funzione non negativa.

$$a_0 = -2\int_{-\pi}^{0} \sin(x)dx = 4\,, \quad a_n = 2\frac{\cos(\pi n)+1}{n^2+1}$$

$$b_n = \frac{2\sin(\pi n)}{n^2+1}$$